N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR :
Mathématiques

présentée
A L'UNIVERSITE PARIS VI

par
Monsieur LEMAIRE Bernard

pour obtenir
le GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR

-=-=-=-=-=-=-

SUJET de la THESE PROBLEMES DE TOURNEES AVEC CONTRAINTES MULTIPLES

Soutenue le : 9 décembre 1971

devant la Commission d'Examen

| | | |
|---|---|---|
| MM. | -J.ARSAC | Président |
| | -R.FAURE | Examinateurs |
| | -L.NOLIN | |
| | - | |
| | -A.HOCQUENGHEM | Invité |

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTEUR-INGENIEUR :
Mathématiques

présentée
A L'UNIVERSITE PARIS VI

par
Monsieur LEMAIRE Bernard

pour obtenir
le GRADE DE DOCTEUR INGENIEUR
-=-=-=-=-=-=

SUJET de la THESE PROBLEMES DE TOURNEES AVEC CONTRAINTES MULTIPLES

Soutenue le : 9 décembre 1971

devant la Commission d'Examen

| | | |
|---|---|---|
| MM. | - J.ARSAC | Président |
| | - R.FAURE | Examinateurs |
| | - L.NOLIN | |
| | - | |
| | - A.HOCQUENGHEM | Invité |

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Je remercie Monsieur J.ARSAC, mon ancien Professeur à l'Ecole Supérieure d'Electricité, de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse, en dépit de ses lourdes charges.

Je veux dire toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur R.FAURE qui m'a formé à la Recherche Opérationnelle à l'E.S.E., puis m'a constamment aidé et encouragé dans mon métier d'enseignant et m'a conseillé tout au long de ce travail.

Je sais gré à Monsieur le Professeur L.NOLIN, qui connaît bien la difficulté des problèmes non numériques,d'avoir eu l'obligeance d'accepter de faire partie du Jury.

Je remercie aussi Monsieur A.HOCQUENGHEM, Professeur de Mathématiques au Conservatoire National des Arts et Métiers, d'avoir bien voulu participer au Jury.

Also I want to acknowledge, to my wife Patricia, my gratitude for the willingness and skill given in typing my thesis.

# I N T R O D U C T I O N

Jusqu'à ces dernières années les applications de la Recherche Opérationnelle concernaient principalement les problèmes que pose la production. Depuis peu, devant l'augmentation de la part des coûts de distribution dans le prix de revient, les chercheurs ont été conduits à s'intéresser aux problèmes que soulève cette distribution.

L'objet de cette thèse est d'étudier une de ces questions - celle de l'organisation des tournées de collecte et de distribution, qui contient et généralise le célèbre problème du commis-voyageur (travelling salesman problem) pour lequel on sait en 1971, déterminer l'optimum pour n de l'ordre de quelques dizaines et de "bonnes" solutions pour n de l'ordre de 100.

Le but de cette recherche a été double: d'une part, trouver des algorithmes pour résoudre exactement le problème des tournées avec la seule contrainte de capacité, et, d'autre part, développer un modèle plus complexe, incluant de multiples contraintes (de temps, par exemple), très proche ainsi de la réalité, qu'on traite alors effectivement par une méthode heuristique.

Après une présentation et formalisation du problème (Chapitre I), le lecteur trouvera l'exposé de la notion d'écartement et sa généralisation; cette notion topologique, qui remplace avantageusement celle de distance, se révèlera fructueuse. (Chapitre II).

Au chapitre III sont analysées les différentes manières d'aborder le problème, telles qu'elles apparaissent dans la bibliographie. On trouvera aussi l'adaptation des algorithmes de Little et de Bertier pour trouver l'optimum lorsque la taille ne dépasse pas quelques dizaines de points.

Le chapitre IV décrit la généralisation de la méthode heuristique de Fletcher qui nous permettra, au chapitre V, d'introduire des contraintes multiples (tonnage, volume, temps et distance limités) dans le modèle.

Le chapitre VI expose les résultats et performances du programme "TOURS" qui résout les problèmes complexes exposés au chapitre précédent.

Après la conclusion, le lecteur trouvera une bibliographie volontairement restreinte aux tournées puis un vocabulaire français-anglais devant faciliter la lecture des articles sur le "truck dispatching problem".

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543511_0034

TABLE DES MATIERES


CHAPITRE I - PRESENTATION ET FORMALISATION DES PROBLEMES DE TOURNEES

Page

I - Présentation Informelle du Problème I-1

II - Formulation Mathématique I-3

CHAPITRE II - LA NOTION D'ECARTEMENT ET SA GENERALISATION

I - La Notion d'Ecartement II-1

II - Généralisation: La Notion de $\alpha$ - Ecartement II-5

III - Lieu des Points x tels que $e_\alpha(a,x) =$ Constante II-7

CHAPITRE III - ANALYSES, ILLUSTRATIONS ET AMELIORATIONS D'ALGORITHMES DE TOURNEES

I - La Méthode de Dantzig et Ramser III-1

II - La Méthode de Fletcher - Clark et Wright III-3

III - L'Algorithme de Little Modifié III-4

IV - Les Méthodes de Bertier III-12

V - La Notion d'Affinité de Vo-Khac III-19

VI - Méthodes de Gaskell III-23

VII - Méthode de J. P. Marilley III-26

CHAPITRE IV - METHODES D'ELABORATION DE TOURNEES

I - L'Algorithme IV-1

II - Utilisation d'un Chaînage Bidirectionnel. IV-2

III - Expression de la Contrainte de Capacité IV-7

IV - Description de la Matrice des Données IV-8

V - Organigrammes IV-9

VI - Exemples IV-11

VII - Matrice des Liaisons Possibles IV-14

CHAPITRE V - INTRODUCTION ET TRAITEMENT DE CONTRAINTES MULTIPLES

page

I - Généralisation de la Contrainte de Capacité C V-1

II - Contrainte de Temps V-1

III - Contrainte de Distance V-3

IV - Organigrammes V-4

CHAPITRE VI - LE PROGRAMME TOURS - RESULTATS

CONCLUSION

BIBLIOGRAPHIE

VOCABULAIRE FRANCAIS-ANGLAIS

CHAPITRE I

# PRESENTATION ET FORMALISATION DES PROBLEMES DE TOURNEES

# I PRESENTATION INFORMELLE DU PROBLEME

1) A partir d'un centre de distribution, on doit approvisionner un ensemble de clients; la demande de chaque client est connue, elle peut varier dans le temps. Pour réaliser le transport, on dispose d'un parc de camions de capacités différentes ou non.

Des coûts de transport peuvent être établis entre les dépôts (clients) et le centre de distribution, ainsi qu'entre les dépôts; ces coûts sont en général, mais pas forcément proportionnels aux distances. (Le concept de coût est à prendre au sens large: il peut aussi bien représenter un coût, qu'une distance ou un temps). Les coûts de transport entre deux points sont pratiquement indépendants de la charge du camion lors du transport. Ces coûts permettent de définir la fonction économique, coût total de la distribution (les coûts et charges fixes n'interviennent pas pour l'optimisation).

Des contraintes de trois types principaux sont en outre imposées aux parcours:

- Difficultés de passage d'un dépôt à l'autre (sens interdits, route barrée pour travaux, région montagneuse, barrières de dégel, etc....)

- Délais de livraison (temps d'arrêt, de déchargement, temps total limité, heures de fermeture des clients, vitesse limitée).
- Affectation des camions (capacité tonnage et volume limités, caractéristiques particulières, disponibilité dans le temps) d'où le nom anglais "truck dispatching problem".

Il s'agit d'organiser les tournées de livraison de façon à minimiser le coût total de transport tout en respectant les contraintes imposées.

2) Formulation duale:

Nous avons formulé le problème en termes de distribution; nous pouvons remarquer qu'un problème de ramassage chez des clients de "produits" de quantité connue avec des camions de capacité limitée, pour centraliser ces "produits" vers un endroit unique, est de même nature que le problème de distribution.

3) Quelques exemples d'applications:

a) Collectes.

- Ramassage quotidien de lait et de produits alimentaires périssables ou de bétail vers l'abbattoir.
- Ramassage des écoliers dans les zones rurales.

b) Distribution.

- Distribution à partir de dépôts de boissons (eau, vin, bière, ...) vers les centres de distributions.
- Approvisionnement des stocks de grossistes, de chaînes de magasins ou de détaillants en produits divers (produits alimentaires, produits d'entretien, ...)
- Remplissage des cuves de pétrole (chauffage) ou d'essence (stations service).

## II FORMULATION MATHEMATIQUE

### 1) Les données:

a) n dépôts ($P_i = 1,2,...,n$) sont desservis à partir d'un centre $P_o$ .

b) La matrice des distances:

(1) $$D = \left[ d_{ij} \right]$$

spécifie le coût de transport de

$$P_i \text{ à } P_j \quad (i,j = 0,1,2,...,n).$$

c) Le vecteur des demandes:

$$Q = \left[ q_i \right]$$

indique les quantités à livrer en chaque dépôt

$$P_i \quad (i = 1,2,...,n)$$

d) (2) La capacité des camions de livraison est C.

On peut construire le graphe $G = G(X,U)$ où $X = \{P_i\}$ :

les sommets sont les entrepôts et le centre;

$$U = \left\{ \overrightarrow{P_i P_j} \;\middle|\; i \neq j \;\; ; \;\; i,j = 0,1,\ldots,n \right\}$$

Les arcs figurent le trajet le plus "court" de $P_i$ à $P_j$ .

A tout sommet $P_i \in X$ est associé le scalaire $q_i$ .

A tout arc $\overrightarrow{P_i P_j} \in U$ est associé le scalaire $d_{ij}$ .

Ce graphe est connexe et même, par construction, "complet" :

$$\forall \; i,j \;\; i \neq j \left[ \overrightarrow{P_i P_j} \in U \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P_j P_i} \in U \right]$$

La symétrie n'est pas obligatoire.

Remarques:

(1) Les $d_{ij}$ peuvent être établis, à partir de la carte géographique ou du graphe G, par un algorithme de plus court chemin (FORD ou DANTZIG par exemple). Voir aussi page VI-5.

(2) Si $\sum q_i \ll C$, on retombe sur le problème du commis-voyageur "travelling salesman problem" - résolu par Little avec un algorithme du type Branch and Bound. Notre problème est plus général et contient le précédent, appelé aussi problème du "voyageur de commerce".

2) Les Inconnues :

Ce sont les parcours: des circuits $\gamma_k$ ($k = 1,\ldots,p$) partant de $P_o$ et revenant à $P_o$.

Dans le problème du commis-voyageur, fig 1, la circuit est unique ($p = 1$); il est dit hamiltonien; il passe une fois et une seule par tous les sommets du graphe.

Pour un problème de tournées, réel, fig 2, les circuits sont dit pré-hamiltoniens (ils passent une fois et une seule par tous les sommets du graphe excepté $P_o$, dans leur ensemble). (*)

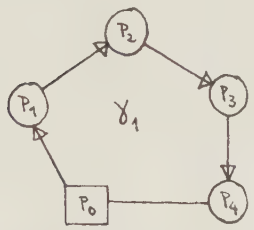



fig 1

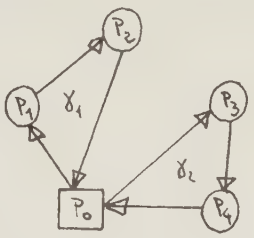



fig 2

Les Contraintes:

Pour chaque circuit préhamiltonien $\gamma_k$, la somme des quantités délivrées aux clients de ce circuit ne doit pas excéder la capacité C des camions:

$$\forall k \quad \sum_{i \in \gamma_k} q_i \leqslant C$$

Remarquons que si $q_i = 1$ pour tout i et si on prend $C = q$ (entier) la contrainte revient à limiter à q le nombre de sommets de chaque circuit pré-hamiltonien: le nombre de clients visités par "tournée" ne dépasse pas q.

(*) Dans la suite nous utiliserons indifféremment les termes "circuit pré-hamiltonien" ou "tournée", qui sont synonymes.

3) La Fonction Economique:

Nous prendrons comme fonction économique $\varphi$ attachée à une solution $S_\lambda$ la somme des longueurs des p circuits préhamiltoniens qui constituent $S_\lambda$ (cette "longueur" peut être une distance, un coût de transport, un temps, etc...)

$$\varphi(S_\lambda) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{P_i P_j \in \gamma_k} d_{ij}$$

Il s'agit de trouver une solution $S_\lambda$ qui minimise $\varphi$ .

Remarque :

La seule formulation en termes de programme linéaire en nombres entiers, de ce problème est décrite en page III-27. Elle est peu satisfaisante.

CHAPITRE II

# LA NOTION D'ECARTEMENT ET SA GENERALISATION

# I LA NOTION D'ECARTEMENT

## 1) Définition

Nous définirons l'écartement $e_o(i,j)$ de l'arc $\overrightarrow{P_i P_j}$ par rapport au centre $P_o$ par :

$$\boxed{e_o(i,j) = d(i,0) + d(0,j) - d(i,j)}$$

Cette notion qui fait intervenir 3 sommets et 3 longueurs présente un caractère moins "local" que la notion de longueur qui ne fait intervenir que deux sommets et une longueur: la quantité est étroitement liée à la position relative de l'arc $\overrightarrow{P_i P_j}$ par rapport au centre $P_o$ d'indice 0.

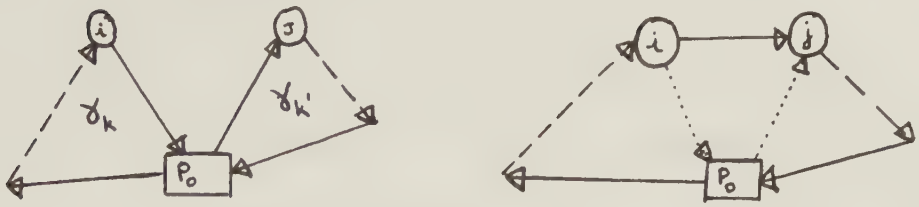
## 2) Interprétation

Considérons deux circuits préhamiltoniens différents $\gamma_k$ et $\gamma_{k'}$ tels que $P_i$ soit le dernier client livré sur la tournée $\gamma_k$ et $P_j$ le premier livré sur la tournée $\gamma_{k'}$ ; supposons que:

$$\sum_{i \in \gamma_k} q_i + \sum_{i \in \gamma_{k'}} q_i \leqslant C$$

On peut alors réunir en une seule les deux tournées $\gamma_k$ et $\gamma_{k'}$ .

On passe ainsi d'une solution $S_I$ à une solution $S_{II}$ :




Soit $\varphi(S_I)$ le coût de la première solution: on en déduit $\varphi(S_{II})$ en notant que pour passer de $S_I$ à $S_{II}$, on a effacé les arcs $\overrightarrow{P_i P_o}$ et $\overrightarrow{P_o P_j}$, mais ajouté l'arc $\overrightarrow{P_i P_j}$ :

$$\varphi(S_{II}) = \varphi(S_I) - e_o(i,j)$$

$e_o(i,j)$ s'interprète comme le <u>gain</u> entre la solution $S_I$ moins bonne que la solution $S_{II}$, si cet écartement est positif.

3) <u>Propriétes de l'écartement</u>

a) L'écartement d'un arc qui passe par l'origine est nul

en effet $d(0,0) = 0$, donc :

$$e_o(i,0) = e_o(0,j) = 0$$

b) Pour un graphe symétrique ($d(i,j) = d(j,i)\ \forall i\ \forall j$), on a:

$$e_o(i,j) = e_o(j,i) \ .$$

c) Un graphe est <u>euclidien</u> s'il vérifié l'inégalité triangulaire :

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$

ce qui est vérifié pour les distances temps et coût car on a déterminé la plus courte longueur de x à y pour tous les points, il en résulte, en pratique, que :

$$\boxed{e_o(i,j) \geqslant 0}$$

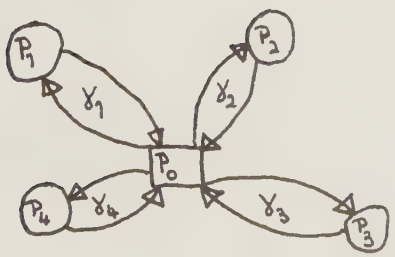
On retrouve ici l'application du théorème de Bellman: "tout sous chemin $\overrightarrow{x...y}$ d'un chemin optimal $\overrightarrow{x...z}$, est lui-même optimal".

4. <u>Théorème de la centration</u>

On définit la centration $C_o$ du sommet O par la formule :

$$\boxed{C_o = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left[ d(i,O) + d(O,i) \right]}$$

2 $C_o$ représente le coût de la solution triviale qui consiste à créer une tournée par client (c'est la "Marguerite" de Fletcher) :



Théorème : Pour toute solution $S_\lambda$ du problème, en désignant par $U_\lambda$ l'ensemble des arcs qui forment $S_\lambda$, on a l'égalité :

$$2\,C_o = \sum_{u \in U_\lambda} d(u) + \sum_{u \in U_\lambda} e_o(u)$$

La somme des écartements des arcs d'une solution ajoutée à la somme des longueurs des arcs de cette solution est indépendante de cette solution et égale deux fois la centration.

Démonstration: On part de la solution initiale $S_o$ (la marguerite) de coût: $\varphi(S_o) = 2\,C_o$ ; on introduit un arc $u_1 = \overrightarrow{P_{i1}P_{j1}}$ . On passe ainsi d'une solution qui admet n tournées à une solution qui n'en comporte que n - 1 en réunissant les circuits préhamiltoniens $\gamma_{i1}$ et $\gamma_{j1}$ .

Le coût de cette nouvelle solution est :

$$\varphi(S_1) = \varphi(S_o) - e_o(i_1,j_1) = 2\,C_o - e_o(u_1)$$

Posons :

$$\varphi^*_o(S_1) = e_o(u_1) .$$

On obtient :

$$\varphi(S_1) + \varphi^*_o(S_1) = 2\,C_o .$$

Toute solution peut être déduite de la "Marguerite" en introduisant successivement les arcs qui ne passent pas par O (d'écartement non nul).

Donc, si on associe à une solution $S_\lambda$ de coût $\varphi(S_\lambda)$ la somme des écartements des arcs qui forment $S_\lambda$ : $\varphi^*_o(S_\lambda)$ on a l'égalité :

$$\boxed{\varphi(S_\lambda) + \varphi^*_o(S_\lambda) = 2\,C_u}$$

Lemme:

Minimiser le coût $\varphi$ revient à maximiser $\varphi^*_o$ .

Remarque:

Ce théorème est généralisé ci-dessous.

## II GENERALISATION: LA NOTION DE $\alpha$-ECARTEMENT

### 1) Définition

Nous définirons l'$\alpha$-écartement $e_\alpha(i,j)$ de l'arc $P_iP_j$ par rapport au centre $P_o$ par:

$$\boxed{e_\alpha(i,j) = d(i,o) + d(o,j) - (1+\alpha)\,d(i,j)}$$

Pour $\alpha = o$, on retombe sur la notion d'écartement classique et pour $\alpha = 1$ sur la mesure de priorité $\pi_{ij}$ introduite par Gaskell [14]. L'intérêt de cette notion est décrit en page III-23.

## III LIEU DES POINTS x TELS QUE $e_\alpha(a,x)$ = CONSTANTE

Fixons un point a et étudions l'égalité :

$$e_\alpha(a,x) = d(a,0) + d(0,x) - (1+\alpha).d(a,x) = C^{te}$$

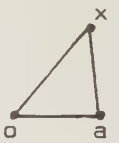
1) Pour $\alpha = 0$ on obtient :

$$d(0,x) - d(a,x) = C^{te} \quad > 0$$

équation d'une (demi-) hyperbole de foyers 0 et a.

2) Pour $\alpha > 0$ nous montrerons que les lieux sont fermés en prouvant que les points à l'infini sont imaginaires.

$$d(0,x) - (1+\alpha).d(a,x) = C^{te} \quad (1)$$




Les directions infinies d'une telle courbe s'obtiennent en annulant les termes de plus haut degré de l'équation algèbrique déduite de (1) :

$$X^2 + Y^2 = (1+\alpha)^2 (X^2 + Y^2)$$

soit $\left[1 - (1+\alpha)^2\right].(X^2 + Y^2) = 0$ : pour $\alpha \neq 0$ les points à l'infini de la courbe sont imaginaires et situés sur les isotropes de 0 :

$$Y = \pm iX .$$

CHAPITRE III

# ANALYSES, ILLUSTRATIONS ET AMELIORATIONS D'ALGORITHMES DE TOURNEES

## I LA METHODE DE DANTZIG ET RAMSER [11]

L'idée est de construire la solution en un certain nombre d'"étapes d'aggrégation" dans lesquelles on sous-optimise des paires ou des groupes de points. Le nombre d'étapes d'aggrégation à utiliser est déterminé comme suit : on range les quantités $q_i$ en une suite $q_1, q_2, \ldots, q_i, q_{i+1}, \ldots, q_n$ telle que $q_k \leqslant q_{k+1}$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$.

On détermine alors t tel que:

$$\sum_{i=1}^{t} q_i \leqslant C \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{t+1} q_i > C$$

t représente évidemment le nombre maximum de livraisons qu'un camion de capacité C peut effectuer pour un ensemble de $q_i$ donné. Puisque la suite $q_1, q_2, \ldots, q_t$ représente une combinaison possible, elle peut se trouver dans la solution optimale. Donc la méthode de calcul du nombre des aggrégations doit admettre la combinaison $q_1, \ldots, q_t$ dans l'aggrégation finale.

Ce sera le cas si le nombre d'étapes d'aggrégation N est donné par :

$$N \simeq \log_2 t$$

Si $2^N$ est le plus grand nombre de points aggrégés dans la $N^{ème}$ et dernière étape. Par exemple, si C = 6000 et les $q_i$ ont les valeurs données en colonne Q de la table page IV-11, la suite ordonnée des $q_i$ est :

1100, 1200, 1200, 1400, 1400, 1500, ... , 1500

et t = 4; donc $N = \log_2 4 = 2$. Dans la première étape d'aggrégation, on peut former des paires de points $P_i P_j$ si: $q_i + q_j \leqslant C$.

Dans la seconde étape d'aggrégation toute paire contenue dans la solution sous-optimale de l'étape 1 peut être combinée avec toute autre paire sans dépasser la contrainte C. Si C = 7000 et les $q_i$ sont les mêmes, t = 5 et N = 3 $d^s$ la 1ère étape d'aggrégation. On pourra former des paires avec les points dont la somme des demandes ne dépasse pas C/4, C/2 dans la deuxième, C $d^s$ la troisième. Bien que N = 2 soit une meilleure approximation de $\log_2 5$ que N = 3, On devra prendre 3 étapes car un total de 2 étapes n'admet pas la combinaison possible 1100, 1200, 1200, 1400, 1400 qui peut être optimale.

Le lecteur notera que si un camion était astreint à livrer exactement deux points, la distance totale parcourue serait la somme constante des distances du centre à tout point $P_i$ plus la somme des distances entre les 2 points de chaque paire, (que nous chercherons donc à minimiser). Ainsi, à chaque étape intermédiaire, on déterminera les liaisons entre paires optimales correspondant à un minimum de la somme des distances entre paire. Lors de l'étape finale en détermine les liaisons optimales de telle sorte que la somme des longueurs des voyages soit minimale.

Dans sa procédure, Dantzig introduit des critères analogues à la programmation linéaire ("colonne de base"). Toutefois les règles choix (aggrégation) sont arbitraires et donc sous-optimales. En particulier pour l'exemple décrit page IV-11 les auteurs trouvent une solution de coût $\varphi$ = 294 alors que par notre algorithme nous trouvons une solution de coût $\varphi$ = 290, qui est optimale. Cette procédure ne permet que difficilement l'introduction de contraintes multiples.

## II LA METHODE DE FLETCHER - CLARK et WRIGHT [13] [10] [15]

Les auteurs définissent pour un graphe symétrique de n sommets la notion d'écartement d'une arête par rapport à un sommet O par :

$$e_{AB} = d_{oA} + d_{oB} - d_{AB}$$

Ils préconisent de calculer les écartements de toutes les arêtes et de les classer par ordre décroissant en une liste L.

On part alors d'une solution initiale toujours possible : La "Marguerite". On tente d'améliorer cette solution on introduisant successivement l'arête de plus grand écartement de la liste L, si elle ne forme pas de fourche - test ($\alpha$) - ou de boucle - test ($\beta$) - et si la somme des demandes sur les 2 cycles pré-hamiltoniens qu'elle réunit ne dépasse pas la capacité des véhicules - test ($\gamma$).

Nous avons généralisé cette méthode pour des graphes orientés en définissant la notion d'écartement d'un arc, mais nous ne formerons jamais la liste L ce qui est très long et inutile lorsque qu'on cherche une solution unique d'un problème de tournées, sans simulation sur les données. Nous avons également élargi cette notion en introduisant les $\alpha$-écartements.

## III L'ALGORITHME DE LITTLE MODIFIE [9]

On suppose connu l'algorithme de Little habituel [18], [12] ou [12b.]

Soit p le nombre de tournées dans la solution optimale; sa valeur n'est pas connue avant la résolution. Nous savons seulement que :

$$p \geqslant \sum_i q_i/C \qquad (1)$$

On considère alors que le centre O est éclaté en p points artificiels et tels que la distance entre deux de ces points artificiels soit infinie.

La structure de la matrice des données sera alors :

| | p dépôts artificiels | | |
|---|---|---|---|
| p | $\infty \ \infty \ \cdots \ \infty$<br>$\infty \ \infty \ \cdots \ \infty$<br>$\infty \ \infty \ \cdots \ \infty$ | $d_{o1} \ d_{o2} \ \cdots \ d_{on}$<br>$d_{o1} \ d_{o2} \ \cdots \ d_{on}$<br>$d_{o1} \ d_{o2} \ \cdots \ d_{on}$ | p lignes identiques |
| | $d_{1o} \ d_{1o} \ \cdots \ d_{1o}$<br>$d_{2o} \ d_{2o} \ \cdots \ d_{2o}$<br>$d_{no} \ d_{no} \ \cdots \ d_{no}$ | $\infty \ d_{12} \ \cdots \ d_{1n}$<br>$d_{21} \ \infty \ \cdots \ d_{2n}$<br>$d_{n1} \ d_{n2} \ \cdots \ \infty$ | Matrice des distances |

On prend comme valeur initiale de p la plus petite compatible avec (1) si on ne trouve pas de solution on pose alors :

$$p := p+1$$

et ainsi de suite. D'après l'expérience des auteurs sur des exemples concrets on dépasse rarement 4 valeurs pour p.

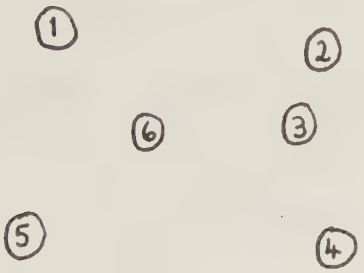
La séparation se fait pour un ensemble A de solutions en considérant un arc ij qui ne fait ni fourche ni boucle avec les arcs communs à toutes les solutions de A. Cet arc ij est choisi dans la matrice correspondant à A comme celui qui a le regret maximum, mais il est aussi nécessaire de vérifier que les contraintes n'ont pas été violées :

1) Est-ce que la contrainte de capacité est respectée?

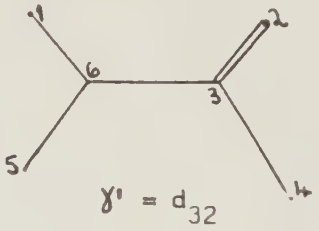
2) Lorsque k tournées sont formées (laissant p-k tournées à organiser), est-ce que la somme des demandes des n' clients restant ne dépasse pas la capacité de p-k véhicules?

$$\left( \sum_{n'} q_i \right) / C \rangle \; p-k \quad ?$$

Les auteurs proposent de prendre une fonction d'évaluation V : soit l'arbre minimal formé avec les k arcs qu'empruntent les solutions de A et complétés par n-k arcs pour former un arbre; on calcule le coût $\gamma$ de cet arbre et on lui ajoute le coût $\gamma'$ de l'arc de coût le plus faible figurant dans cet arbre :




au départ la fonction d'évaluation est :




$\gamma' = d_{32}$

$$\gamma = d_{16} + d_{65} + d_{63} + d_{32} + d_{34}$$

$$V = \gamma + \gamma' = d_{16} + d_{65} + d_{63} + 2\, d_{32} + d_{34}$$

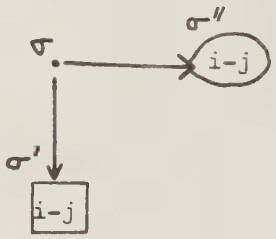
Les résultats obtenus par cette méthode sont décevants: à taille égale en comparant avec un problème de circuit hamiltonien minimal, le temps de calcul est beaucoup plus long;pour le problème de Dantzig et Ramser à 13 villes il a fallu 15 minutes de calculs à une IBM 7090 pour parvenir au résultat! Notre méthode fournit sur cet exemple l'optimum en quelques secondes sur IBM 360-30.

Sur un exemple à 9 villes de Bertier et Schrage on développe une arborescence qui atteint 100 sommets pour être certain d'atteindre l'optimum; toutefois on trouve 1 solution optimale en une "descente directe" c'est-à-dire en utilisant l'heuristique.

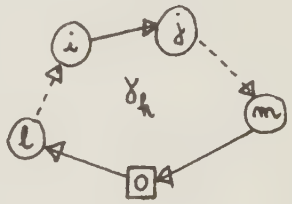
La fonction d'évaluation que nous proposons est la suivante :

1) Pour la racine de l'arborescence : pour les $\frac{n(n-1)}{2}$ couples de sommets i,j on calcule $q_i + q_j$ ; si cette quantité dépasse C, la contrainte de capacité, on pose $d_{ij} = d_{ji} = +\infty$. Puis on retranche le plus petit élément de chaque ligne pour faire apparaître un zéro par ligne, puis on recommence s'il y a lieu en colonne, ceci afin d'obtenir un zéro par ligne et par colonne. L'évaluation attachée à la racine est la somme des éléments retranchés.

2) Pour tout autre sommet :




a) s'il est du type $\boxed{ij}$, c'est-à-dire correspond à l'introduction de l'arc ij on raye la ligne i et la colonne j (test $\alpha$) dans la matrice correspondante ; soient l et m les deux extrémités du circuit pré-hamiltonien $\gamma_k$ dans lequel on vient d'inclure cet arc ij et $Q = \sum_{r \in \gamma_k} q_r$ ; on examine les liaisons i'l et mi' :




si $q_{i'} + q_l > C$ on fait $d_{i'l} = +\infty$

$q_m + q_{i'} > C$ $d_{mi'} = +\infty$

car ces liaisons violent la contrainte de capacité (test $\gamma$). Puis on interdit l'arc ml en faisant $d_{ml} = +\infty$ (test $\beta$). La fonction d'évaluation $V(\sigma')$ en ce sommet est alors la somme de la fonction du sommet précédent $V(\sigma)$ et des éléments qu'il faut soustraire à la matrice ainsi modifiée pour refaire apparaître un zéro par ligne et par colonne (en effet un zéro peut être rayé ($\alpha$), transformé en $+\infty$($\gamma$) et ($\beta$) ou subsister inchangé).

b) S'il est du type (i-j) (interdiction de l'arc i-j), on fait $d_{ij} = +\infty$; le regret $r_{ij}$ de l'arc ij est de la forme :

$$r_{ij} = d_{ij'} + d_{i'j}$$

Où $d_{ij'} \geqslant 0$ est le second plus petit terme de la ligne i et $d_{i'j} \geqslant 0$ celui de la colonne j.

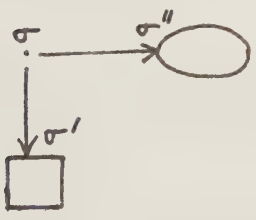
La fonction d'évaluation $V(\sigma'')$ en ce sommet est :

$$V(\sigma'') = V(\sigma) + r_{ij}$$

Nous avons utilisé cette fonction d'évaluation pour l'exemple traité page III-10 et 11.

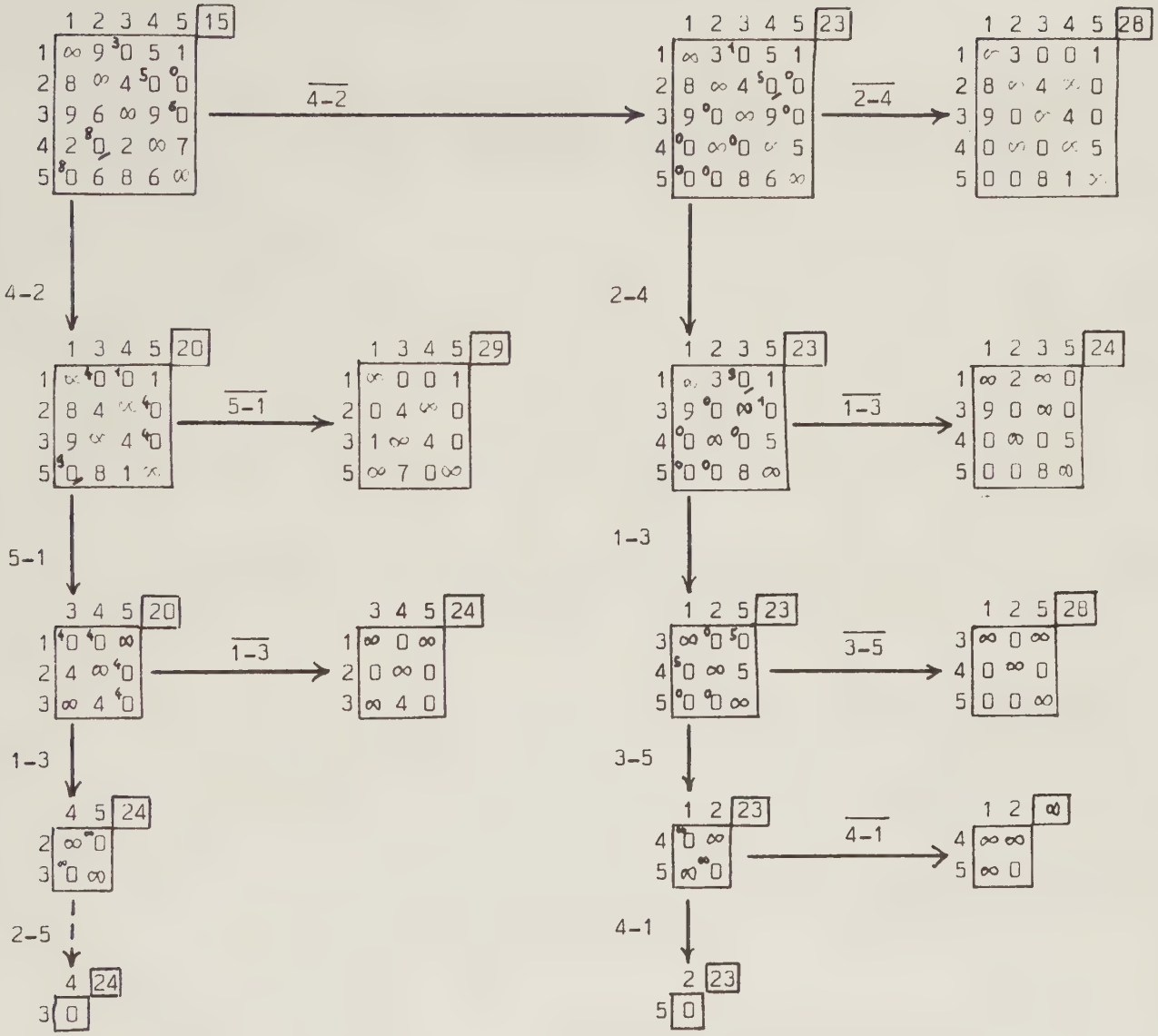
Remarque : Implantation d'une arborescence de recherche en mémoire [27] [15b]

Lors de la recherche il est nécessaire de stocker l'information relative à tous les sommets pendants de l'arborescence : ce sont les seuls qui seront "séparés" éventuellement dans la suite. Il est donc inutile de garder l'information relative aux sommets de type $\sigma$ :




Lors de la séparation d'un tel sommet en commence par créer le sommet $\sigma'$ (acceptation de l'arc i-j) puis on "écrase" le sommet par le sommet $\sigma''$. Dans nos exemples, l'information relative à $\sigma$ est composée d'une matrice intermédiaire $M_\sigma$ et de $V(\sigma)$.

L'information relative à $\sigma''$ comporte la même matrice que pour $\sigma$, dans laquelle on a remplacée $d_{ij} = 0$ par $d_{ij} = +\infty$ et retranché $d_{ij'}$ de la ligne i et $d_{i'j}$ de la colonne j: en particulier $M_\sigma$ et $M_{\sigma''}$ ont même dimension, et $M_{\sigma''}$ remplace $M_\sigma$.




Exemple 1 : Résolution d'un problème de commis-voyageur par l'algorithme de Little

On a inclus dans l'arborescence les matrices des calculs intermédiaires; les petits chiffres en haut des zéros sont les regrets de ces zéros; le nombre encadré sur le coin N-E de chaque matrice représente l'évaluation (par défaut car nous sommes dans un problème de maximisation).

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ∞ | 12 | 3 | 8 | 4 |
| 2 | 11 | ∞ | 7 | 3 | 3 |
| 3 | 12 | 9 | ∞ | 12 | 3 |
| 4 | 5 | 3 | 5 | ∞ | 10 |
| 5 | 3 | 9 | 11 | 9 | ∞ |

Matrice des distances

Exemple 2 : Résolution d'un problème de tournées par l'algorithme de Little (généralisé et modifié).

La matrice des distances est symétrique; la contrainte de capacité est C = 14.

| $q_i$ | 0 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 18 | 1 | | | | |
| 4 | 7 | 15 | 2 | | | |
| 4 | 10 | 7 | 6 | 3 | | |
| 6 | 22 | 13 | 22 | 19 | 4 | |
| 5 | 20 | 11 | 6 | 4 | 20 | 5 |

$\sum_{i=1}^{5} q_i = 25$

C = 14 donc p = 2

| | $0_1$ | $0_2$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0_1$ | ∞ | ∞ | 18 | 7 | 10 | 22 | 20 | -7 |
| $0_2$ | ∞ | ∞ | 18 | 7 | 10 | 22 | 20 | -7 |
| 1 | 18 | 18 | ∞ | 25 | 7 | 13 | 11 | -7 |
| 2 | 7 | 7 | 25 | ∞ | 6 | 22 | 6 | -6 |
| 3 | 10 | 10 | 7 | 6 | ∞ | 19 | 4 | -4 |
| 4 | 22 | 22 | 13 | 22 | 19 | ∞ | 20 | -13 |
| 5 | 20 | 20 | 11 | 6 | 4 | 20 | ∞ | -4 |
| | -1 | -1 | | | | -6 | | |

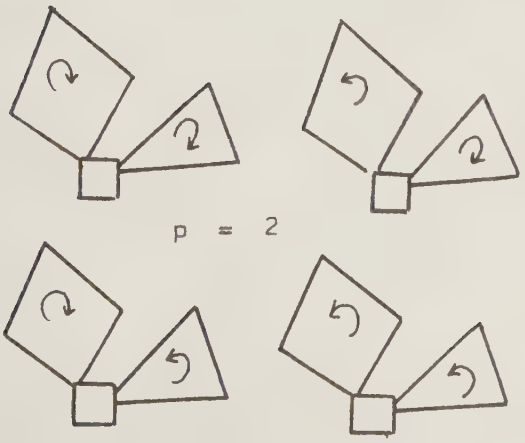
L'arborescence de la recherche est en page suivante; l'optimum se compose des deux cycles pré-hamiltoniens $\gamma_1$ : 0 - 1 - 4 - 0 et $\gamma_2$ : 0 - 2 - 5 - 3 - 0.

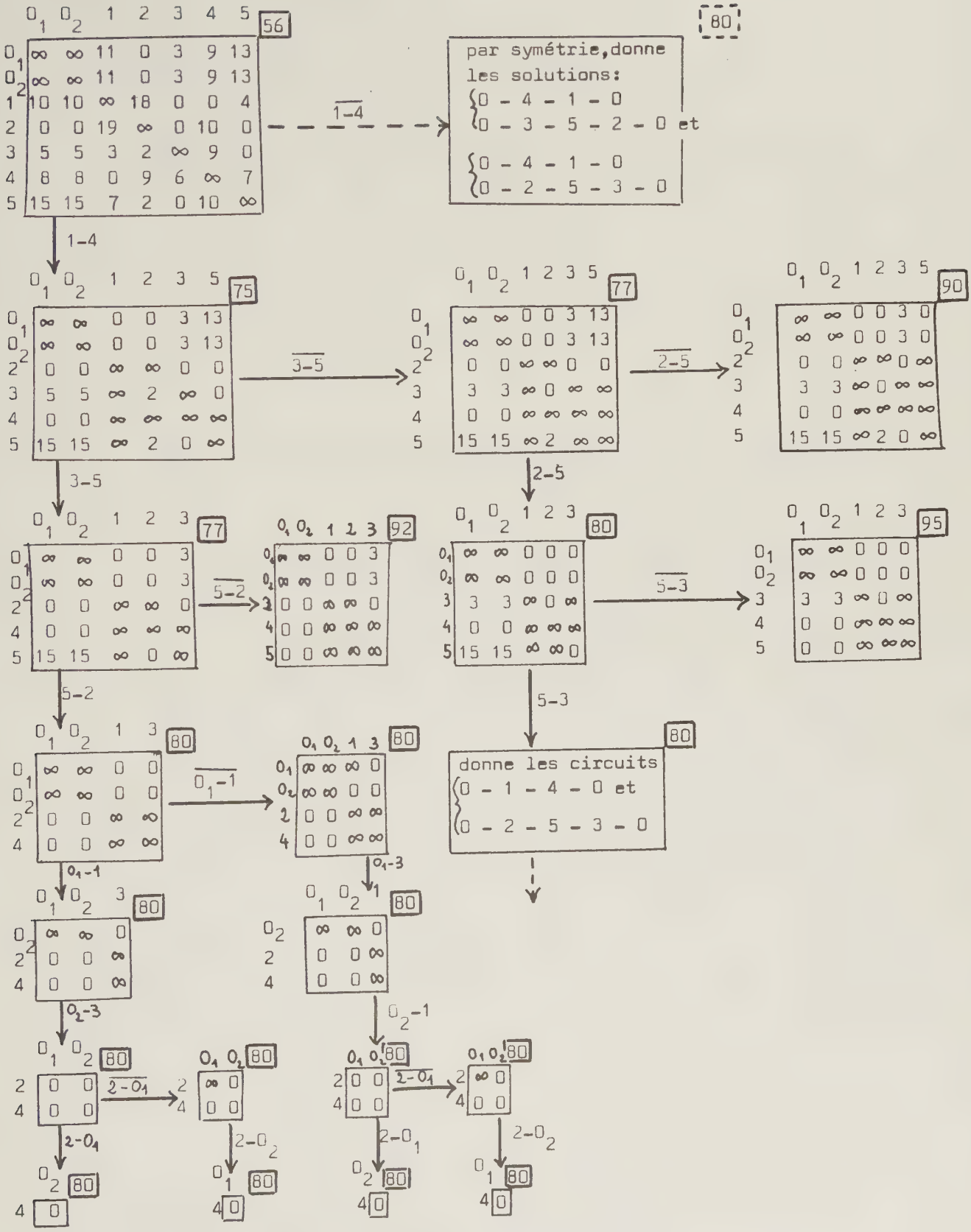
1) Le raccordement des circuits pré-hamiltoniens (tournées) aux p centres fictifs peut se faire de $2^p$ façons différentes pour donner une solution unique (coin S-0 de l'arborescence). Mais cette énumération n'est pas nécessaire: il suffit d'obtenir un raccordement et de ne pas générer tous ces sommets puisque V ($\sigma$). a la même valeur pour tous:

$V(\sigma) = \varphi_{opt.}$

2) Pour traiter un problème <u>symétrique</u> par l'algorithme de Little on doit orienter les arcs. A une solution sans l'orientation comportant p circuits pré-hamiltoniens (tournées) 2 correspond $2^p$ solutions <u>orientées</u> équivalente mais obtenues sur des branches différentes de l'arborescence.

La taille de l'arborescence et le temps de calcul sont alors augmentés pour s'assurer de l'optimalité de la solution obtenue (coin S.O.).






Une seule solution (optimale) en confondant

$O_1$ et $O_2$ : circuits 0 - 1 - 4 - 0 et 0 - 3 - 5 - 2 - 0 .

## IV LES METHODES DE BERTIER [4] [5] [6] [7] [8]

Bertier utilise la notion d'écartement la liste L et propose des algorithmes pour le problème du commis-voyageur, que l'on peut étendre aux problèmes avec plusieurs tournées.

Il prend comme centre O la ville de centration la plus faible :

$$C_o = \min_i C_i$$

Soit E l'ensemble des solutions du problème (card E = $\frac{(n-1!)}{2}$) pour un graphe complet symétrique. On applique une procédure SEP.

1) Le principe de séparation (BRANCH) sur $\mathcal{P}(E)$ consiste à effectuer une partition dichotomique sur $A \in \mathcal{P}(E)$: et sépare l'ensemble des solutions de A entre A' et A": $A = A' \cup A''$ et $A' \cap A'' = \emptyset$ . Les solutions de A' empruntent une arête (ou un arc) ij qui ne fait ni fourche ($\alpha$), ni "boucle" ($\beta$) (c'est-à-dire circuit de longueur $< n$) avec les arêtes (arcs) qu'empruntent toutes les solutions contenues dans A. Cette arête ij est celle d'écartement la plus grande dans la liste L et qui n'a pas encore été examinée pour A.

Les solutions de A" n'empruntent pas cette arête (arc). Ce principe de séparation satisfait les 3 axiomes de finitude(car le nombre de sous ensembles que l'on peut construire est fini), de conservation (car on effectue des partitions) et d'arrêt.

On n'effectue plus de partition d'un sous ensemble A lorsqu'on a sélectionné n-2 arêtes (on a alors une chaîne dont on relie les deux extrémités au centre pour obtenir le cycle cherché).

2) Principe d'évaluation

Dans ce problème de maximisation (de la somme des écartements des arêtes ou arcs de la solution) on prend une fonction d'évaluation par excès V :

V est une somme de n-2 écartements; repérons une arête par i, son rang dans la liste L des écartements classés par valeurs décroissantes.

- au départ (A = E) on prend :

$$V = \sum_{i=1}^{n-2} e_0(u_i) \qquad u_i \in U$$

c'est-à-dire la somme des n-2 plus grands écartements,

- pour tout autre sommet (partition de A) on fait la somme de n-2 écartements comprenant ceux des k arêtes déjà sélectionnées, (par lesquelles passent toutes les solutions de A) et des n-k-2 arêtes consécutives dans la liste L.

Ce principe satisfait les axiomes de maximisation (à chaque étape V est supérieur à V , somme des écartements du cycle optimal) - et de coïncidence; lorsque n-2 arêtes ont été sélectionnées, V coïncide avec la somme des écartements du cycle formé par ces n-2 arêtes et 2 arêtes issues de O et d'écartement nul.

d'autres fonctions d'évaluation sont possibles :

V' Somme des écartements des k arêtes déjà sélectionnées et des n-k-2 arêtes de la liste L qui ne font ni fourche ($\alpha$) ni boucle ($\beta$) avec ces k arêtes déjà sélectionnées.

V" même que V', mais les n-k-2 arêtes de plus ne font ni fourche ni boucle entre elles.

Elles sont plus longues à calculer mais serrent de plus près les ensembles A. Aussi la taille de l'arborescence est réduite en utilisant ces fonctions. On doit trouver un compromis entre temps de calcul des évaluations et taille de l'arborescence.

3) Adaptation aux problèmes de tournées.

On retrouve la même difficulté que dans l'algorithme de Little généralisé: on doit supposer à priori connue la valeur de p (nombre de tournées). Une borne inférieure de p est $\sum q_i/C$.

- si $\sum q_i/C$ est entier on prend $p = \sum q_i/C$
- sinon on prend $p = E(\sum q_i/C) + 1$ où E désigne la partie entière.

On ne sait donc pas à priori combien d'arêtes (d'arc) d'écartement non nul il faut prendre en compte dans la fonction d'évaluation.

Cependant on pourra procéder ainsi:

On pose r = p, et on retient n-r-1 écartements dans la fonction d'évaluation. Lorsque k arêtes (arcs) ont déjà sélectionnées en un sommet de l'arborescence, deux cas sont possibles :

- si k = n - r - 1 ; le sommet correspondant ne contient qu'une solution et la somme des k écartements donne la valeur de la fonction économique f de cette solution.
- si k < n - r - 1; le sommet correspondant peut contenir une seule ou plusieurs solutions; il n'en contient qu'une s'il n'y a plus de possibilité de souder deux tournées. Sinon aux k arêtes déjà choisies correspondent n-k tournées $\gamma_\gamma$ (cycles pré-hamiltoniens) à chacune desquelles est associé sa demande totale $\sum_{i \in \gamma_j} q_i = Q_j$ ; soit Q la somme des deux plus petites demandes totales $Q_j$ et $Q_{j'}$ :

  Si $Q \leqslant C$, on peut encore réunir des tournées en sélectionnant des arêtes (arcs). Le calcul des évaluations porte sur n - r - 1 écartements.

  Si $Q > C$, il n'y a plus sur cette branche de l'arborescence de groupement possible. Le sommet correspondant ne contient qu'une seule solution à r = n - k - 1 > p tournées, dont la valeur exacte est donnée par la somme des k écartements correspondants. Il ne sera plus nécessaire de continuer la séparation sur cette branche (sommet terminal).

Une arête de L sera retenue pour effectuer une séparation si elle ne forme, avec les précédentes déjà sélectionnées, ni fourche ($\alpha$), ni boucle ($\beta$), ni dépassement de capacité ($\delta$).

On peut utiliser comme fonctions d'évaluation celles dues à Bertier, décrites au §2, ou mieux:

V''' Somme des écartements des k arêtes déjà sélectionnées et des n-k-p-1 arêtes de la liste L, prises par ordre décroissant, qui ne font ni fourche ni boucle ni dépassement de capacité avec les cycles pré-hamiltoniens formés avec ces k arêtes.

Bertier n'a pas programmé ces méthodes; pour exemple de Marconi [20] il trouve la solution après 28 séparations. Pour l'exemple de Dantzig et Ramser, [11], il abandonne après 110 séparations. L'introduction de contraintes multiples est délicate et surtout les fonctions d'évaluation en rendent compte mal, allongeant ainsi prohibitivement les temps de calcul.

4) Exemple 1 : Résolution d'un problème de commis-voyageur par la méthode des écartements de Bertier. (Nous reprenons le problème de la page III-9).

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ∞ | 12 | 3 | 8 | 4 |
| 2 | 11 | ∞ | 7 | 3 | 3 |
| 3 | 12 | 9 | ∞ | 12 | 3 |
| 4 | 5 | 3 | 5 | ∞ | 10 |
| 5 | 3 | 9 | 11 | 9 | ∞ |

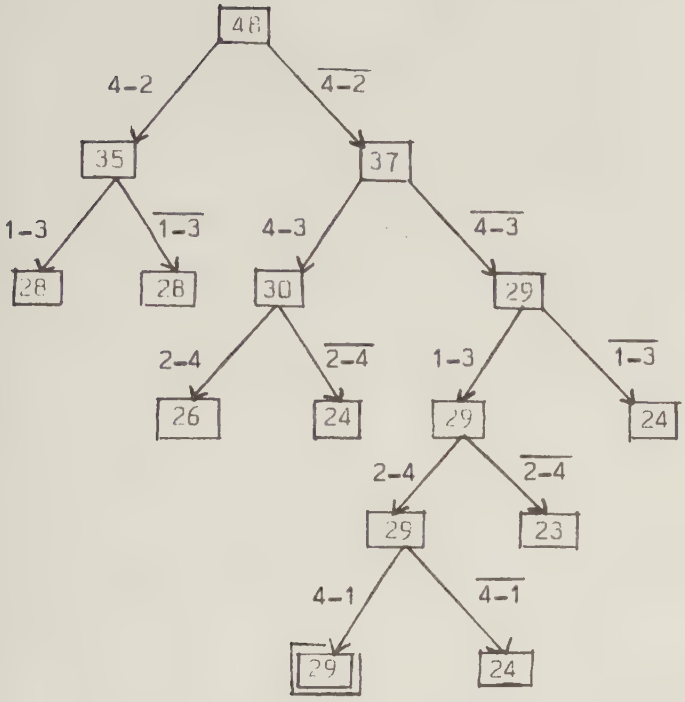
Matrice des distances

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -∞ | 1 | 12 | 5 | 0 |
| 2 | -5 | -∞ | 7 | 9 | 0 |
| 3 | -6 | 3 | -∞ | 0 | 0 |
| 4 | 8 | 16 | 16 | -∞ | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | -∞ |

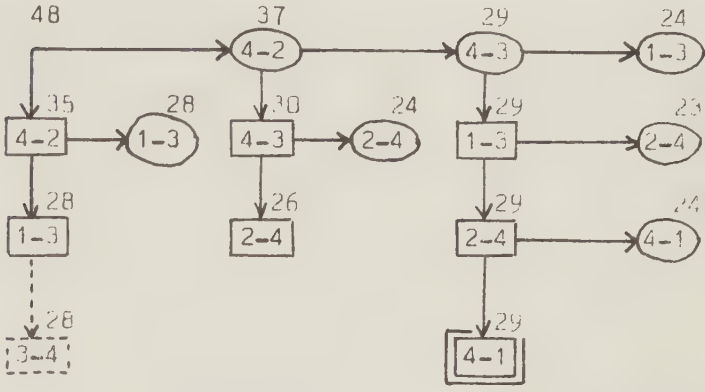
Matrice des écartements

| L | |
|---|---|
| 4-2 | 16 |
| 4-3 | 16 |
| 1-3 | 12 |
| 2-4 | 9 |
| 4-1 | 8 |
| 2-3 | 7 |
| 1-4 | 5 |
| 3-2 | 3 |
| 1-2 | 1 |
| 3-4 | 0 |
| 2-1 | -5 |
| 3-1 | -6 |

On prend comme "centre" le sommet 5 de plus faible centration et comme évaluation V' : la somme de n-2 écartements (3 ici) composée de n-k-2 ne faisant ni fourche ($\alpha$) ni boucle ($\beta$) avec les k écartements de arcs déjà sélectionnés, et des écartements de ces k arcs.




Autre présentation de l'arborescence :




circuit hiérarchique

5-1-3-4-2-5

circuit optimal

5-2-4-1-3-5

D'après le théorème (II-4): $\varphi^*_5 + \varphi = 2\ C_5 = 52$ donc $\varphi = 52 - 29 = 23$ ;
pour le circuit hiérarchique: $\varphi = 52 - 28 = 24$

Exemple 2 : Soit le problème de tournées ci-dessous (déjà traité au §III par l'algorithme de Little modifié). La contrainte de capacité est C = 14.

| $q_i$ | 0 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 18 | 1 | | | | |
| 4 | 7 | 25 | 2 | | | |
| 4 | 10 | 7 | 6 | 3 | | |
| 6 | 22 | 13 | 22 | 19 | 4 | |
| 5 | 20 | 11 | 6 | 4 | 20 | 5 |

$$\sum_{i=1}^{5} q_i = 25$$

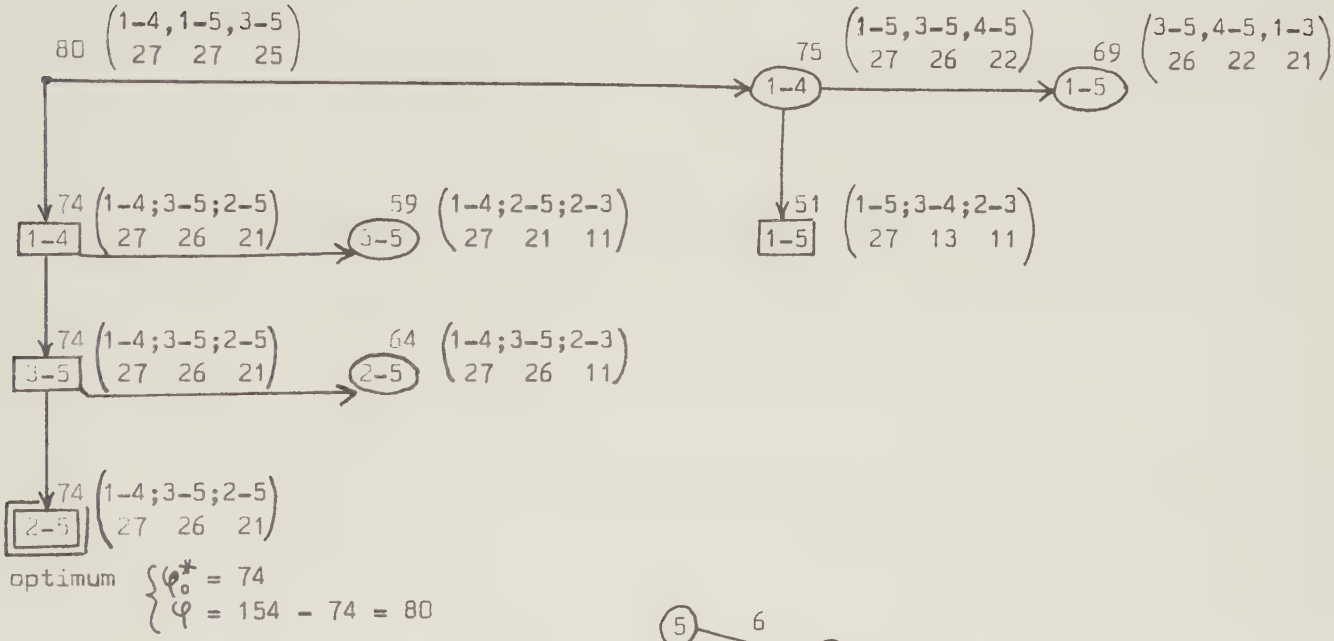
Liste L des écartements classés par ordre décroissant.

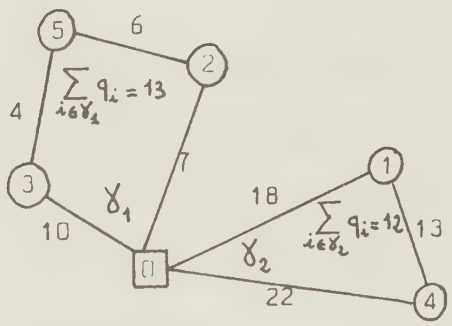
| | |
|---|---|
| 1-4 | 27 |
| 1-5 | 27 |
| 3-5 | 26 |
| 4-5 | 22 |
| 1-3 | 21 |

| | |
|---|---|
| 2-5 | 21 |
| 3-4 | 13 |
| 2-3 | 11 |
| 2-4 | 7 |
| 1-2 | 0 |

C = 14 donc p = 2. Nous utilisons la fonction d'évaluation V''' :

Puisque n = 6, la fonction d'évaluation sera une somme de n - p - 1 = 6 - 3 = 3 écartements comprenant les k écartements des arêtes sélectionnées et les 3 - k écartements suivants dans L qui fait ni "fourche" ni "boucle" avec ces k arêtes et qui ne créent pas de cycle excédant la contrainte de capacité:




$\varphi = 27 + 53 = 80$

Ici la solution optimale est "hiérarchique"; (donc notre méthode développée au chapitre IV donne aussi l'optimum).

## V LA NOTION D'AFFINITE DE VO-KHAC [24]

1) Introduire un "centre" dans le problème du commis-voyageur est artificiel mais permet de profiter de la notion d'écartement [7]. Vo-Khac [24] introduit la notion d'affinité d'une arête, en généralisant les écartements, que nous élargissons pour un arc :

$$\boxed{a_{ij} = C_i + C^j - (n-2)\, d_{ij}} \quad \text{où} \quad C_i = \sum_{i \neq j} d_{ij} \quad \text{et} \quad C' = \sum_{j \neq i} d_{ij}$$

Entre l'affinité d'un cycle (circuit) hamiltonien S et sa longueur, en posant :

$$A(S) = \sum_{ij \in S} a_{ij} \qquad \text{et} \qquad \varphi(S) = \sum_{ij \in S} d_{ij}$$

on a pour tout S la relation :

$$\boxed{A(S) + (n-2).\varphi(S) = 2C}$$

où C désigne la centration totale du graphe :

$$C = \sum_{i=1}^{n} \left[C_i + C^i\right]$$

Chercher le cycle (circuit) hamiltonien de valeur minimale revient à trouver celui d'affinité maximale. L'intérêt de cette notion réside en un théorème énonçant que pour l'ensemble des solutions, le gain moyen G (i,j) obtenu en passant par l'arête (arc) (i,j) est relié à l'affinité $a_{ij}$ par :

$$a(i,j) = \langle\varphi\rangle + \frac{(n-3)\ (n-2)}{(n-1)}\ G\ (i,j) \quad .$$

où $\langle\varphi\rangle$ est le coût moyen des cycles (circuits) hamiltoniens.

La procédure SEP à utiliser est la même que celle décrite dans le paragraphe IV:

On sépare les cycles (circuits) qui contiennent une arête (arc) (i,j) de ceux qui ne la contiennent pas. On construit une chaîne (chemin) de n-1 arêtes (arcs), puis on relie le premier sommet avec le dernier; lors de la construction de la chaîne (chemin) on évite les boucles ($\beta$) et les fourches ($\alpha$).

La fonction (évaluation par excés) V choisie est la somme des n premières affinités de la liste L. Pour le premier sommet (séparation de E):

$$V = \sum_{i=1}^{n} a(u_i) \qquad u_i \in U \quad .$$

Pour tout autre sommet, on fait la somme de n affinités comprenant k arêtes déjà sélectionnées, n-k arêtes consécutives dans la liste L.

On peut également utiliser des fonctions d'évaluation du type V'ou V".

Le groupe d'étudiants qui a rédigé [27] a constaté sur plusieurs exemples qu'il est plus intéressant de prendre une définition différente de l'affinité ce qui a été confirmé par nos essais :

$$\boxed{a'_{ij} = C_i + C_j - (n-1)\, d_{ij}} \quad \text{alors: } A'(S) + (n-1).\varphi(S) = 2C$$

La taille de l'arborescence est réduite de moitié, de même que le temps de calcul(entre autres pour exemple n° 3 à 32 villes proposé dans 14 ), par rapport à l'affinité normale.

Par contre :

$$a''_{ij} = C_i + C^j - n.d_{ij}$$

donne des résultats inférieurs.

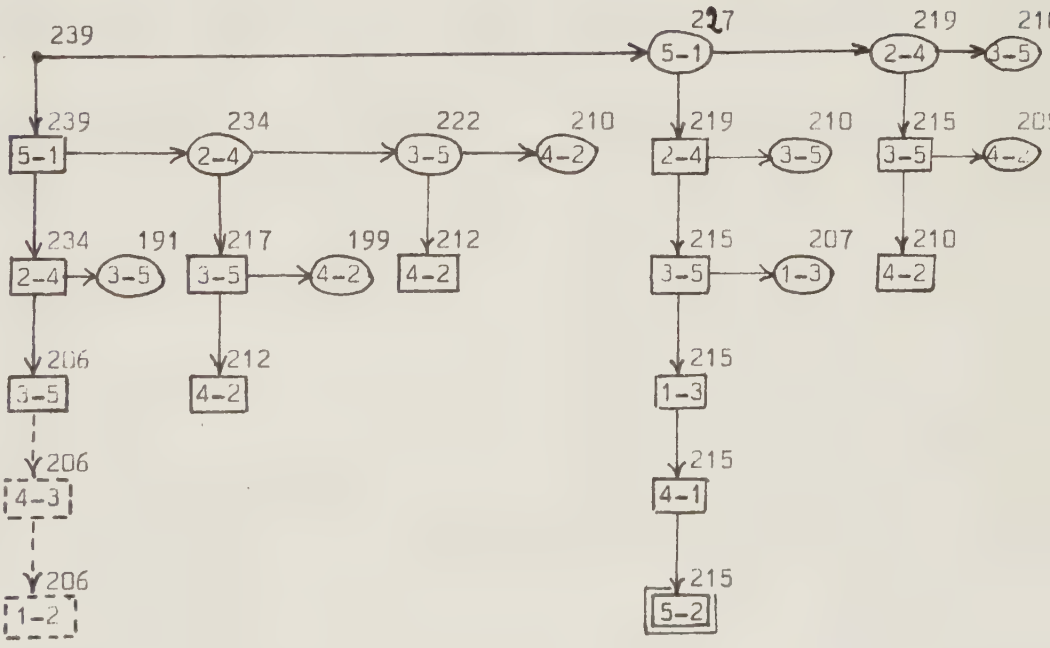
3) Exemple 1 : Nous reprenons les données de la page III-9. La fonction d'évaluation utilisée est du type V'.

$$(n-2)\,\varphi + A = 2C = 284$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 24 | 44 | 35 | 35 |
| 2 | 22 | | 29 | 47 | 35 |
| 3 | 31 | 42 | | 32 | 47 |
| 4 | 39 | 47 | 34 | | 13 |
| 5 | 54 | 38 | 25 | 37 | |

Matrice des affinités $a_{ij}$

| L | |
|---|---|
| 5-1 | 54 |
| 2-4 | 47 |
| 3-5 | 47 |
| 4-2 | 47 |
| 1-3 | 44 |
| 3-2 | 42 |
| 4-1 | 39 |
| 5-2 | 38 |
| 5-4 | 37 |
| 1-4 | 35 |
| 1-5 | 35 |
| 2-5 | 35 |
| 4-3 | 34 |
| 3-4 | 32 |
| 3-1 | 31 |
| 2-3 | 29 |
| 5-3 | 25 |
| 1-2 | 24 |
| 2-1 | 22 |
| 4-5 | 13 |




circuit hiérarchique A=206
1-2-4-3-5-1 $\varphi$ = 26

circuit optimal A = 215
1-3-5-2-4-1 $\varphi$ = 23

Exemple 2 : Nous reprenons les données de la page III-9. La fonction d'évaluation utilisée est du type V'.

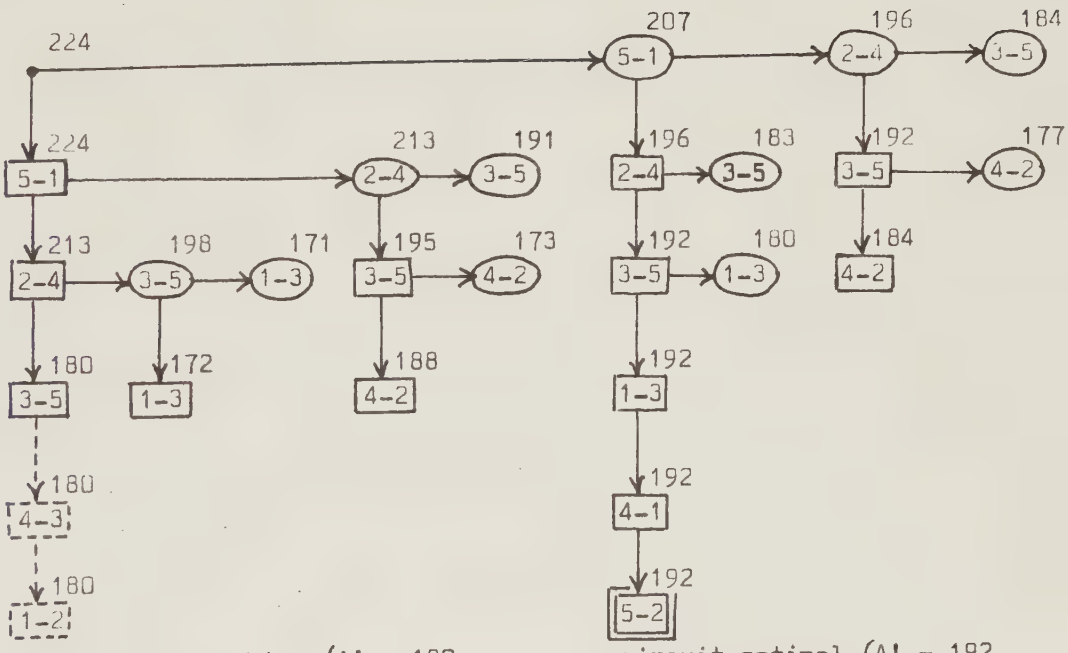
$$(n-1)\,\varphi + A' = 284$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 12 | 41 | 27 | 31 |
| 2 | 11 | | 22 | 44 | 32 |
| 3 | 19 | 33 | | 20 | 44 |
| 4 | 34 | 44 | 29 | | 3 |
| 5 | 51 | 29 | 14 | 28 | |

Matrice des affinités modifiées $a'_{ij}$

L

| | |
|---|---|
| 5-1 | 51 |
| 2-4 | 44 |
| 3-5 | 44 |
| 4-2 | 44 |
| 1-3 | 41 |
| 4-1 | 34 |
| 3-2 | 33 |
| 2-5 | 32 |
| 1-5 | 31 |
| 4-3 | 29 |
| 5-2 | 29 |
| 5-4 | 28 |
| 1-4 | 27 |
| 2-3 | 22 |
| 3-4 | 20 |
| 3-1 | 19 |
| 5-3 | 14 |
| 1-2 | 12 |
| 2-1 | 11 |
| 4-5 | 3 |




circuit hiérarchique 1-2-4-3-5-1 : A' = 180, φ = 26

circuit optimal 1-3-5-2-4-1 : A' = 192, φ = 23

4) Application aux problèmes de tournées

Vo-Khac n'a pas appliqué la notion d'affinité à notre problème. Nous avons tenté d'utiliser un cycle hamiltonien optimal - obtenu par la méthode exposée ci-dessu puis de le découper en portion de cycles respectant la contrainte de capacité; les résultats sont décevants. Une recherche se poursuit pour ramener un problème de tournées à celui du commis-voyageur, puis résoudre celui-ci par l'algorithme de Vo-Khac modifié qui semble le plus efficace, à l'heure actuelle, pour la recherche d'un cycle hamiltonien optimal.(pour $n > 25$ [15b] ).

## VI METHODES DE GASKELL [14]

Gaskell a étudié comment les professionnels déterminent les tournées "à la main"; ces gens, à condition de leur laisser beaucoup de temps, trouvent en effet dans la grande majorité des cas l'optimum.

On constate qu'ils commencent l'organisation des tournées en reliant deux clients éloignés du centre et voisins (ce qu'implique la notion d'écartement). Ils tentent de minimiser la distance ajoutée pour tout client qu'on inclue dans une tournée. Parallèlement ils tentent de minimiser p, le nombre de tournées.

Appelons $[d'_{ij}]$ une matrice déduite des données $d_{ij}$ ; $d'_{ij}$ peut être, par exemple un écartement, une affinité ou autre ... $d_{ij}$ doit être une mesure de la priorité à accorder à la liaison ij.

L'écartement $e_o(i,j) = d(i,o) + d(o,j) - d(i,j)$ est une bonne mesure de cette priorité car il a les propriétés :

a) L'écartement total d'une tournée est la somme des écartements des arêtes (ou arcs) de cette tournée (II-4).

b) La distance $\Delta\varphi$ ajoutée à une tournée en joignant un point j au point i (si i est extrémité de la tournée) est :

$$\Delta\varphi = d(i,j) + d(j,o) - d(i,o)$$

$$= d(j,o) + d(o,j) - e_o(i,j).$$

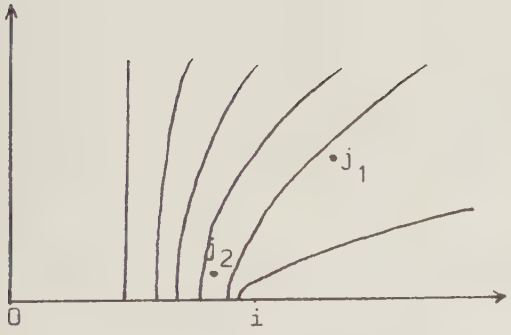
c) L'écartement est symétrique en i et j lorsque les distances sont symétriques (II-2).

d) Le lieu des points tels que :

$e_o(i,x) = C^{te}$ (positive)

pour o et i fixés est une demi-<u>hyperbole</u> de foyers o et i (II-7).

Gaskell considère que b) fait tout l'intérêt de la notion d'écartement.




On peut faire à cette notion le reproche suivant: Considérons la figure ci-contre; les points $j_2$ et $j_1$ sont tels que : $e_o(i,j_1) > e_o(i,j_2)$ On reliera donc, en cas de choix, i avec $j_1$ et non pas avec $j_2$. La plupart des spécialistes choisiraient de relier j à $j_2$.

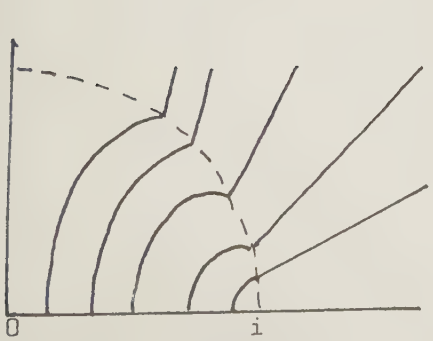
En conséquence on doit chercher d'autres <u>mesures de priorité</u>. Gaskell, dont nous reprenons les notations, propose :

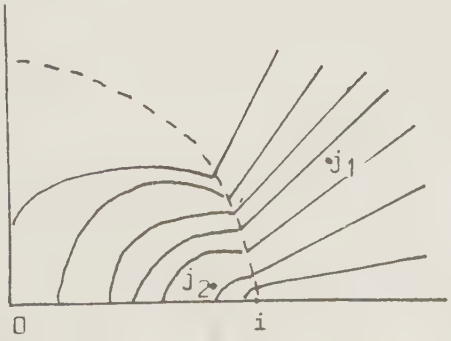
$$\lambda_{ij} = s_{ij}(\bar{d} + d_{oi} - d_{oj} - d_{ij}) \quad \text{où } \bar{d} \text{ est la moyenne des } d_{oi}$$

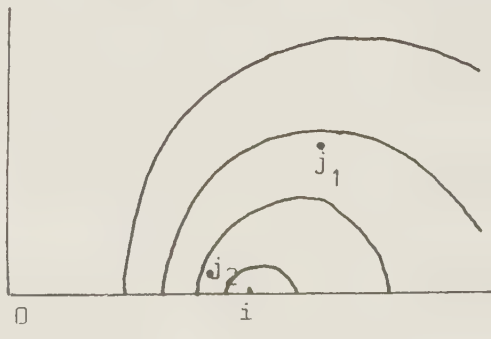
et $$\pi_{ij} = 2\,d_{oj} - (d_{oj} + d_{ij} - d_{oi}) - d_{ij} = d_{oi} + d_{oj} - 2\,d_{ij}$$ soit :

$$\boxed{\pi_{ij} = e_{oij} - d_{ij}}$$ .

On trouve les lieux suivants:



Méthode :

La première arête ij (arc) dans la liste L est utilisée pour créer la première tournée (si $q_i + q_j \leqslant C$); on considére alors la seconde arête.

Si elle a une extrémité en commun avec la première (j par exemple), on l'inclut sur la première tournée (si ($\gamma$) est satisfait) et toutes les arêtes ayant j pour extrémité sont rayées de la liste L (condition ($\alpha$)). Sinon cette seconde arête est employée pour créer la seconde tournée. A partir de la troisième arête on doit aussi vérifier la condition ($\beta$).

Cette méthode est pratique dans le cas où les véhicules sont de capacité différente.

Il ressort de l'étude comparative de Gaskell que les résultats obtenus en prenant $\pi_{ij}$ comme mesure de priorité sont sensiblement équivalents à ceux donnés par les écartements.

Sur un problème qui se répète dans le temps (cf TOURS chapitre V) a peut utiliser la mesure de priorité $e_\alpha(i,j)$ et déterminer la valeur de $\alpha$ par apprentissage.

Sur un problème unique, on peut résoudre avec des valeurs de $\alpha$ différentes et garder évidemment la meilleure des solutions obtenues.

## VII METHODE DE J.P. MARILLEY [21]

J. P. MARILLEY auteur d'une thèse sur les Problèmes de Recouvrement propose la méthode suivante :

a) Déterminer N, nombre maximum de points de livraison pouvant être groupés en une seule tournée; pour cela il suffit de classer les $q_i$ par ordre croissant :

$$q_1 \leqslant q_2 \quad \text{----} \leqslant q_m .$$

Dans ces conditions le facteur de groupage N est égal à la plus grande valeur de k (k = 1,2,...,m) pour laquelle l'inégalité :

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \leqslant C$$

est vérifiée.

b) Construire l'ensemble des tournées admissibles en énumérant (!) toutes les combinaisons des m points pris 1 à 1, puis 2 à 2, puis ..., puis N à N, dont la somme des demandes n'excède pas la capacité C. Soit n le nombre des tournées admissibles ainsi obtenues.

c) Evaluer le "coût" $c_j$ de chaque tournée admissible; ce coût est égal à la distance totale minimum parcourue par un véhicule qui part de l'origine, passe par les points $P_{i1}, P_{i2},\ldots,P_{it}$ ($t \leqslant N$) et revient au point de départ.

On voit que ce calcul, très simple pour les tournées comportant un ou deux points, nécessite la résolution d'un problème du type "voyageur de commerce" pour $t \geqslant 3$.

Exemple : Soit à calculer le coût d'une tournée groupent les 3 points $P_1$, $P_2$, et $P_3$. Les distances $d_{ij}$ sont données dans le tableau 5, $P_o$ représentant l'origine.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P_o$ | | | |
| 15 | $P_1$ | | |
| 25 | 12 | $P_2$ | |
| 30 | 15 | 8 | $P_3$ |

On trouve 3 tournées possibles :

$(P_o,P_1,P_2,P_3,P_o)$ avec un coût de 65

$(P_o,P_2,P_3,P_1,P_o)$ avec un coût de 63

$(P_o,P_3,P_1,P_2,P_o)$ avec un coût de 82

La tournée admissible retenue sera donc la 2ème, qui correspond au coût minimum.

d) Affecter à chaque tournée admissible une variable bivalente $x_j$ telle que:

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ si la } j^{\text{ième}} \text{ tournée est retenue} \\ 0 \text{ dans le cas contraire} \end{cases}$$

Si la tournée qui correspond à la variable $x_j$ comporte le point $P_i$ on posera $a_{ij} = 1$ ; dans le cas contraire $a_{ij}$ prendra la valeur 0.

e) Il ne reste plus maintenant qu'à exprimer que pour chaque point $P_i$ il doit exister une tournée et une seule qui y effectue la livraison soit :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 1 \qquad i = 1,2,\ldots,m.$$

et que l'on désire obtenir le kilométrage total minimum, soit :

$$\text{Minimiser } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Le problème ainsi obtenu a la forme d'un Problème de Recouvrement Exact à n variables et m contraintes.

L'auteur a développé un programme qui génère automatiquement le P.R.E. correspondant à des problèmes de tournées comportant un maximum de 15 points et dont le facteur de groupage est au plus égal à 4.

Remarque:

On peut calculer une borne supérieure du nombre des tournées admissibles de la manière suivante :

$$\mathcal{N} = C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^N \gg n$$

L'énumération des tournées admissibles et la résolution du P.R.E. correspondant ne constituent donc une approche réaliste que lorsque les valeurs de m et de N ne sont pas trop élevées.

Exemple : $\left.\begin{matrix} m = 15 \\ N = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathcal{N} = 1940$

Exemple numérique

C = 800, m = 4

| $q_i$ | $P_o$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 100 | 15 | $P_1$ | | | |
| 200 | 8 | 12 | $P_2$ | | |
| 400 | 12 | 25 | 10 | $P_3$ | |
| 500 | 9 | 5 | 20 | 6 | $P_4$ |

Tableau 6

$(a_{ij})$ =

| j = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | i=1 |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | i=2 |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | i=3 |
| | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | i=4 |

Tableau 8

Le tableau 6 représente la matrice des distances; dans le tableau 7 on trouve la liste de toutes les tournées admissibles, accompagnées de leur coût minimal; la matrice des contraintes du P.R.E. correspondant figure dans le tableau 8.

| Variable | Tournée | Coût |
|---|---|---|
| $x_j$ | | $c_j$ |
| $x_1$ | $P_1$ | 30 |
| $x_2$ | $P_2$ | 16 |
| $x_3$ | $P_3$ | 24 |
| $x_4$ | $P_4$ | 18 |
| $x_5$ | $P_1, P_2$ | 35 |
| $x_6$ | $P_1, P_3$ | 52 |
| $x_7$ | $P_1, P_4$ | 29 |
| $x_8$ | $P_2, P_3$ | 30 |
| $x_9$ | $P_2, P_4$ | 37 |
| $x_{10}$ | $P_1, P_2, P_3$ | 49 |
| $x_{11}$ | $P_2, P_1, P_4$ | 34 |

Tableau 7

La résolution de ce P.R.E. a donné comme solution optimale :

$$Z = 59$$
$$x_7 = x_8 = 1$$

ce qui correspond aux deux tournées suivantes :

$$(P_o, P_1, P_4, P_o)$$
$$\text{et } (P_o, P_2, P_3, P_o)$$

L'auteur présente la résolution de l'exemple à 12 points de Dantzig et Ramser pour lequel N = 4; il énumère 538 tournées admissibles, construit la matrice a (i,j) trouve une solution optimale à la $559^{ème}$ itération (de coût Z = 290) mais ce n'est qu'après 42 869 itérations qu'il peut affirmer que cette solution est vraiment optimale. (Une autre méthode avec "classement des contraintes" donne 16532 et 71246 itérations). La solution proposée semble convenable pour les problèmes où $N \ll m$ c'est-à-dire pour les problèmes où la contrainte de capacité joue fortement. Sinon elle pratique une énumération dans le combinatoire et ne peut être appliquée dans le cas général.

CHAPITRE IV

# METHODES D'ELABORATION DE TOURNEES

## I L'ALGORITHME

On part de la solution initiale de la marguerite de coût $2\,C_o$. On essaye d'améliorer cette solution en réunissant deux circuits préhamiltoniens (cf passage de $S_I$ à $S_{II}$ en page II-2): dans ce but on choisit l'arc ij d'$\alpha$-écartement le plus grand et qui satisfait aux 3 contraintes:

$$\sum_{i \in \gamma_k} q_i \quad + \quad \sum_{i \in \gamma_{k'}} q_i \leqslant C \qquad (\gamma)$$

et si l'arc i,j ne forme pas de circuit préhamiltonien qui ne passe pas par le centre O, $(\beta)$; et si l'arc i,j ne forme pas de fourche avec les arcs déjà sélectionnés, $(\alpha)$.

Ce que l'on formalise dans l'algorithme:

1) Calculer la matrice des écartements $[E]$, pour tout i faire $e_\alpha(i,i) = 0$.

2) Prendre la Marguerite comme solution de base;
$\varphi = 2\,C_o \qquad \varphi^*_\alpha = 0$.

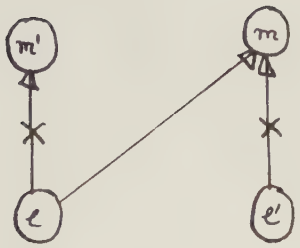
3) Prendre dans E l'élément le plus grand $e_\alpha(l,m)$ parmi les rangées non rayées.

4) Si $e_\alpha(l,m) \leqslant 0$ alors FIN sinon passer à 5.

5) Si l'arc l,m satisfait aux 3 contraintes $\alpha,\beta,\gamma$ l'accepter
$\varphi^*_\alpha = \varphi^*_\alpha + e_\alpha(l,m)$ ; rayer la ligne l et la colonne m de $[E]$ ; passer à 3.

6) Si l'arc l,m ne satisfait pas aux contraintes faire
$e_\alpha(l,m) = -\infty$; passer à 3.

Remarque : Conséquences du choix de l'arc l,m :




On ne pourra plus "partir" de l c'est-à-dire introduire un arc l,m' sinon on formerait une fourche.

De même on ne pourra plus arriver au point m c'est-à-dire introduire un arc l',m sinon on formerait une fourche:

Si on a choisi l'arc l,m on pourra alors "rayer" la ligne l et la colonne m de la matrice $[E]$ .

## II UTILISATION D'UN CHAINAGE BIDIRECTIONNEL.

1) Définition.

Toute solution d'un problème de tournées est telle que pour le graphe solution tout sommet (sauf 0) n'admet qu'un prédécesseur et qu'un successeur. Soit $S = (X, \Gamma_s)$ une solution:

$$\forall i \quad i \neq 0 \quad \left|\Gamma_s(i)\right| = 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\Gamma_s^{-1}(i)\right| = 1$$

Nous décrirons pour tout sommet son successeur $\Gamma_s(i)$ par le vecteur des Successeurs :

$$S = \left[S_1, S_2, \ldots, S_n\right]$$

La $i^{ème}$ composante vaudra $\Gamma_s(i)$ :

$$S_i = \Gamma_s(i)$$

Nous décrirons pour tout sommet i son prédesseur $\Gamma_s^{-1}(i)$ par le vecteur $P = \left[P_1, P_2, \ldots, P_n\right]$ vecteur des Prédecesseurs.

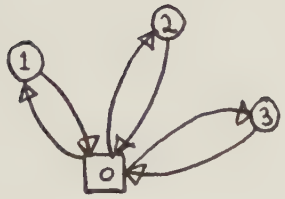
La $i^{ème}$ composante vaudra $\Gamma_s^{-1}(i)$ :

$$P_i = \Gamma_s^{-1}(i)$$

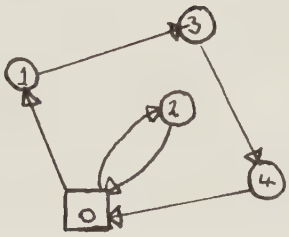
Exemples:

1) pour la Marguerite:

$\forall i \quad P_i = S_i = 0$




2) pour le graphe ci-dessous:




| i | $P_i$ | $S_i$ |
|---|---|---|
| 0 | - | - |
| 1 | 0 | 3 |
| 2 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 4 |
| 4 | 3 | 0 |

2) Utilisation des vecteurs S et P comme indicateurs

Dès qu'un arc l,m appartient à la solution on a :

$$S_l = m \qquad \text{et} \qquad P_m = l$$

On peut considérer qu'une ligne i est rayée dès que $S_i \neq 0$.

On peut considérer qu'une colonne k est rayée dès que $P_k \neq 0$.

On peut donc utiliser S comme indicateur de ligne:

si $S_i = 0$ la ligne n'est pas rayée - elle l'est sinon et

de même on peut utiliser P comme indicateur de colonne.

3) Notations :

Soient deux tournées $\gamma_k$ et $\gamma_{k'}$ susceptibles d'être réunies (soudées) en une seule.

l' est l'indice du premier client visité sur $\gamma_k$.

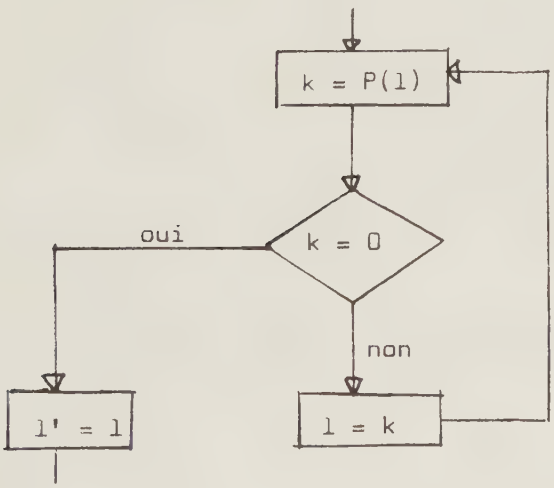
l dernier .

m est l'indice du premier client visité sur $\gamma_{k'}$.

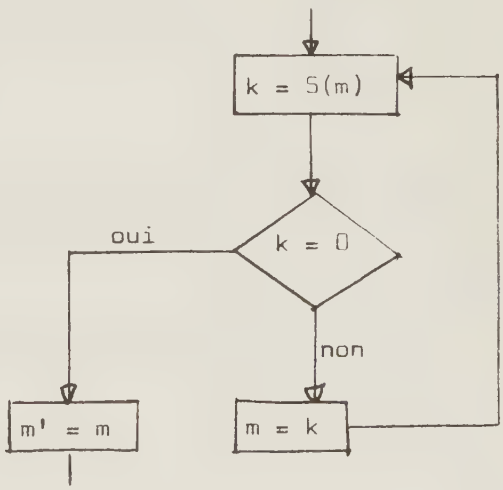
m' dernier .

L'introduction de l'arc l,m permet de réunir $\gamma_k$ et $\gamma_{k'}$.

l' se détermine à partir de l en utilisant la chaîne P:



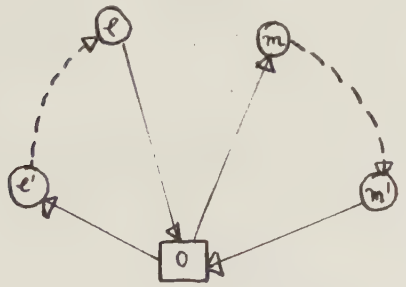

m' se détermine à partir de m en utilisant la chaîne S:



4) Utilisation des vecteurs S et P pour les tests ($\alpha$)

Reportons nous page IV-1

On peut introduire un arc l,m pour souder 2 tournées (en admettant que la contrainte de capacité soit satisfaite) si l est le dernier client livré, sur la tournée $\gamma_k$ et si m est le premier client livré sur la tournée $\gamma_{k'}$ - sinon on crée des fourches.




($\alpha$) "pas de fourche" s'écrit donc:

$$P_m = 0 \quad \underline{et} \quad S_l = 0$$

Ce qui est automatiquement réalisé si l'on effectue la recherche de $e_\alpha(l,m)$ dans les rangées non rayées.

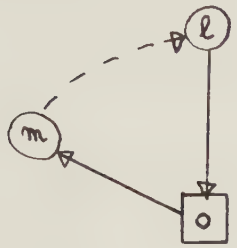
5) Elimination de points du graphe

Il peut être nécessaire d'éliminer des points du graphe (client k ayant annulé sa commande). Il suffit alors de faire lors de l'initialisation :

$$P_k = k \quad \underline{et} \quad S_k = k$$

6) Test des "boucles".

Soit une tournée où le premier client visité est m et le dernier l considérons l'arc l,m satisfaisant (∝) :




$$P_m = 0 \quad \underline{et} \quad S_l = 0$$

Mais si on l' introduit dans la solution, on crée un circuit qui ne passe plus par 0 il faut donc s'interdire ce type de liaison:

l ne doit pas faire partie de l'ensemble des successeurs de m, ce qui peut s'exprimer (en notant $S(S(k)) = S^2(k)$ ).

$$\boxed{l \notin \hat{S}(m)} \qquad (\hat{S}(m) = m \cup S(m) \cup S^2(m) \cup S^3(m) \cup \ldots)$$

l n'appartient pas à la fermeture transitive de m, ce qui revient à faire;

$$\boxed{d(m',l') = -\infty}$$

dès que l' on a soudé deux tournées $\gamma_k$ et $\gamma_{k'}$ .

7) Résumé

L'interêt du chaînage bidirectionnel est double, il permet de servir d'indicateur pour rayer les lignes et les colonnes de la matrice et d'exprimer simplement les contraintes liées au graphe.

III EXPRESSION DE LA CONTRAINTE DE CAPACITE

On peut introduire un arc l,m s'il satisfait aux conditions ($\alpha$) et ($\beta$) et si l'on a :

$$\sum_{i \in \gamma_k} q_i + \sum_{i \in \gamma_k} q_i \leqslant C \qquad (\gamma)$$

l est le dernier point visité de la tournée $\gamma_k$, m le premier sur la tournée $\gamma_{k'}$. Dans l'algorithme nous remplacerons pour tout point i d'une tournée $\gamma_k$ sa demande $q_i$, par la somme $\sum_{i \in \gamma_k} q_i$ des demandes de tous les points de la tournée.

Ainsi la condition ($\gamma$) s'exprime simplement par :

$$\boxed{q_l + q_m \leqslant C} \qquad (\gamma)$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'affecter tous les points de la tournée $\gamma_k$ de la somme des demandes: en effet seul le premier et le dernier point peuvent être considérés pour réunir deux tournées entre elles. Il suffit donc d'affecter $\sum_{i \in \gamma_k} q_i$ au premier point l' et au dernier point m' d'une tournée.

Remarque: Le test de fin donné en page IV-1 peut être amélioré: considérons lors de toute étape du déroulement de l'algorithme, les deux tournées $\gamma_{k_1}$ et $\gamma_{k_2}$ de plus faible tonnage, respectivement $q_{l_1}$ et $q_{l_2}$ ($l_1$ est le successeur de 0 sur le circuit $\gamma_{k_1}$). Si:

$$q_{l_1} + q_{l_2} > C$$

on ne pourra plus "souder" de tournées entre elles et le traitement est donc terminé.

## IV DESCRIPTION DE LA MATRICE DES DONNEES

1) Nous avons vu que S sert d'indicateur de ligne et P d'indicateur de colonne.

2) Comme l'écartement d'un arc qui passe par O est nul, il est inutile de garder une ligne et une colonne de zéros:

$e_o(O,i)$ sera remplaçé par $d(O,i)$ et $e_o(i,O)$ par $d(O,i)$.

3) Vue la symétrie de la formule :

$$e_o(i,j) = d(i,O) + d(O,j) - d(i,j).$$

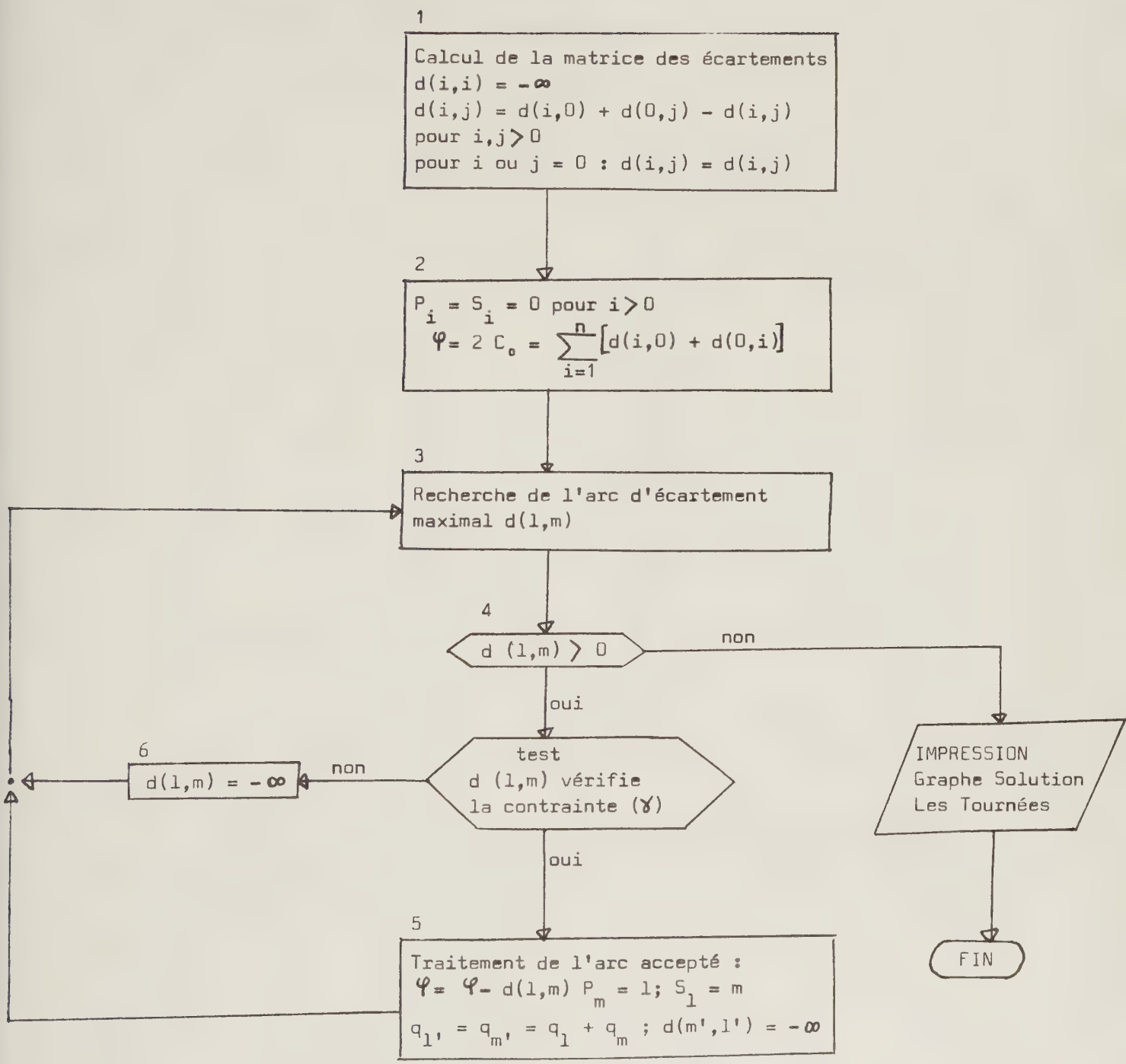
On voit que la connaissance des écartements des arcs ne passant pas par O et les distances de l'origine au point, permet de recalculer $d(i,j)$ par involution:

$$d(i,j) = d(i,O) + d(O,j) - e_o(i,j).$$

Il est important de pouvoir disposer à la fois des écartements pour le déroulement de l'algorithme, et des distances pour calculer les coûts, temps de parcours (voir le chapitre suivant, en page V-4 et V-5), sans pour autant encombrer la mémoire de deux matrices.

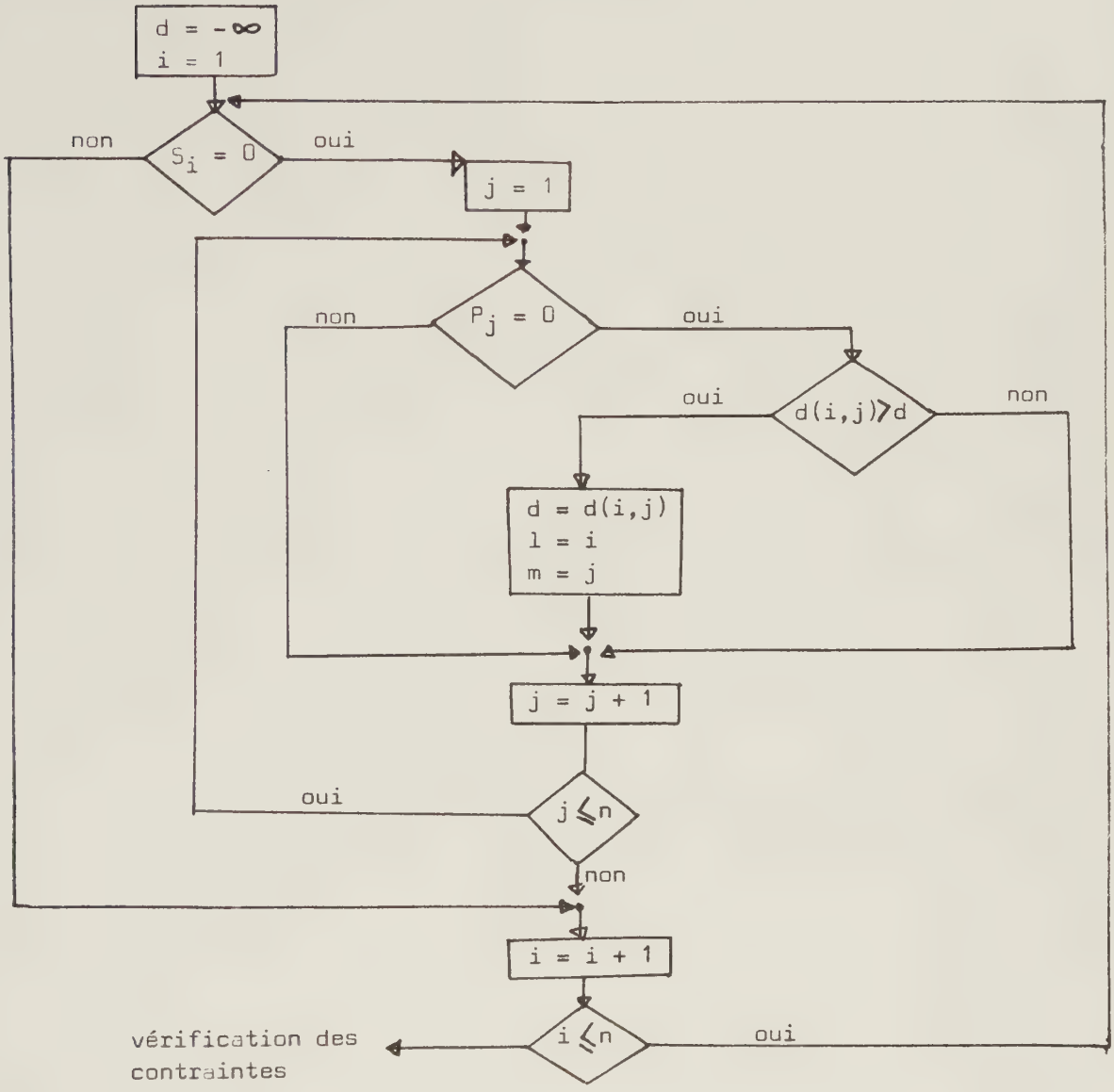
Nous avons adopté pour la programmation la valeur $\alpha = O$.

## V ORGANIGRAMMES




On rapprochera cet organigramme de l'algorithme donné en page IV-1.

donnons le détail de la recherche qui "intégre" la vérification de la contrainte (α) :




dans le cas où sélectionne n dans le tableau l'intégration de la condition (α) conduit à $n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \ldots$ comparaisons ce qui est de l'ordre de $n^3/3$ pour n grand.
Une méthode classique donne $n^3$ comparaison: notre méthode de recherche est 3 fois plus rapide.

## VI- EXEMPLE

1) Prenons l'exemple à 13 villes de DANTZIG et RAMSER
l'exemple est symétrique.

| Ville | Quantité | | 9 | 14 | 21 | 23 | 22 | 25 | 32 | 36 | 38 | 42 | 50 | 52 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1400 | 9 | | 18 | 18 | 10 | 10 | 16 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 2 | 1700 | 14 | 5 | | 20 | 20 | 20 | 16 | 20 | 20 | 16 | 20 | 20 | 20 |
| 3 | 1500 | 21 | 12 | 7 | | 34 | 22 | 16 | 28 | 20 | 16 | 32 | 34 | 34 |
| 4 | 1400 | 23 | 22 | 17 | 10 | | 26 | 20 | 30 | 24 | 20 | 36 | 42 | 46 |
| 5 | 1700 | 22 | 21 | 16 | 21 | 19 | | 36 | 44 | 42 | 38 | 44 | 44 | 44 |
| 6 | 1400 | 25 | 24 | 23 | 30 | 28 | 9 | | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 | 50 |
| 7 | 1200 | 32 | 31 | 26 | 27 | 25 | 10 | 7 | | 58 | 54 | 64 | 64 | 64 |
| 8 | 1900 | 36 | 35 | 30 | 37 | 35 | 16 | 11 | 10 | | 66 | 72 | 72 | 72 |
| 9 | 1800 | 38 | 37 | 36 | 43 | 41 | 22 | 13 | 16 | 6 | | 68 | 76 | 70 |
| 10 | 1600 | 42 | 41 | 36 | 31 | 29 | 20 | 17 | 10 | 6 | 12 | | 84 | 84 |
| 11 | 1700 | 50 | 49 | 44 | 37 | 31 | 28 | 25 | 18 | 14 | 12 | 8 | | 92 |
| 12 | 1100 | 52 | 51 | 46 | 39 | 29 | 30 | 27 | 20 | 16 | 20 | 10 | 10 | |
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Capacité uniforme des Camions: C = 6000

On complète la partie supérieure du tableau par les écartements. Nous utilisons le premier organigramme; $2C_0 = 728$

| i | $P_i$ | $S_i$ | $Q_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | - | - | - |
| 1 | 0 4 | 0 | 12 58 |
| 2 | 0 | 0 3 | 17 46 |
| 3 | 0 2 | 0 4 | 15 29 |
| 4 | 0 3 | 0 1 | 14 29 46 58 |
| 5 | 0 | 0 | 17 |
| 6 | 0 | 0 8 | 14 51 |
| 7 | 0 | 0 10 | 12 56 |
| 8 | 0 6 | 0 9 | 19 37 |
| 9 | 0 8 | 0 | 18 37 51 |
| 10 | 0 7 | 0 11 | 1. 44 |
| 11 | 0 10 | 0 12 | 17 [illegible] |
| 12 | 0 11 | 0 | 11 28 44 56 |

(en centaines d'unités)

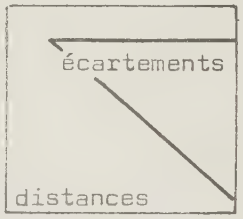
évolution des vecteurs $P_i, S_i, Q_i$

liste des arcs sélectionnés:

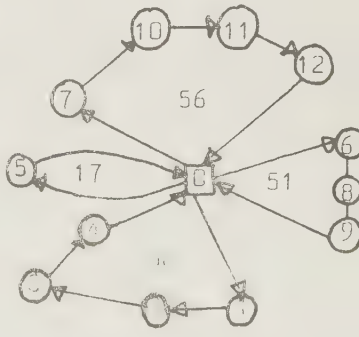
| arc | écart. |
|---|---|
| 11 - 12 | 92 |
| 10 - 11 | 84 |
| 8 - 9 | 68 |
| 7 - 10 | 64 |
| 6 - 8 | 50 |
| 3 - 4 | 34 |
| 2 - 5 | 28 |
| 1 - [illegible] | [illegible] |

$\varphi^* = 4$

$\varphi = 290$

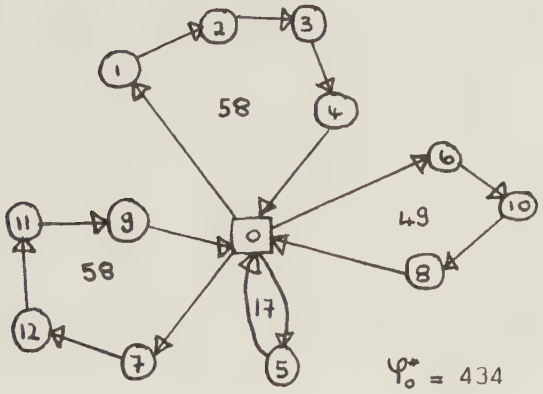



structure du tableau des données




graphe de la solution I

2) Conclusion : Notre méthode a donné une solution de coût $\varphi = 290$; les auteurs de l'exemple, par une méthode complètement différente, trouvaient la solution I de coût 294. Notre méthode a conduit, ici, à l'optimum.




Solution II

$\varphi_o^* = 434$
$\varphi = 294$

| arc | écart. |
|---|---|
| 1-2 | 18 |
| 2-3 | 28 |
| 3-4 | 34 |
| 6-10 | 50 |
| 10-8 | 72 |
| 7-12 | 64 |
| 12-11 | 92 |
| 11-9 | 76 |

3) Remarque: Reportons nous aux données tableau de distances.

d(0,12) = 52 donc d(0,12) = d(0,4) + d(4,12)
d(0,4) = 23 l'inégalité triangulaire montre
d(4,12) = 29 que 0-4-12 sont alignés.

d(0,12) = 52 donc d(0,12) = d(0,5) + d(4,12)
d (0,5) = 22 0-5-12 sont alignés et on en
d(5,12) = 30 déduit d(4,5) = 1 d'après le
tableau d(4,5) = 10!

L'exemple ne semble pas tiré d'un cas concret (observer la curieuse structure de la matrice des écartements) mais fabriqué pour la méthode de Dantzig et Ramser.

Toutefois nous constatons, que même sur un exemple fabriqué, notre méthode donne une très bonne solution.

D'une façon générale notre méthode se révèlera "bonne" pour les graphes euclidiens.

AUTRE EXEMPLE

On utilise l'algorithme pour traiter la recherche d'un circuit hamiltonien de valeur minimale pour le graphe de 5 villes de la page III-13. C'est un problème avec une seule tournée ($C = \infty$).

| | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| a | $\infty$ | 3 | 9 | 11 | 9 |
| b | 4 | $\infty$ | 12 | 3 | 8 |
| c | 3 | 11 | $\infty$ | 7 | 3 |
| d | 3 | 12 | 9 | $\infty$ | 12 |
| e | 10 | 5 | 3 | 5 | $\infty$ |

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $-\infty$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $-\infty$ | 1 | 12 | 5 |
| 2 | 0 | -5 | $-\infty$ | 7 | 9 |
| 3 | 0 | -6 | 3 | $-\infty$ | 0 |
| 4 | 0 | 8 | 16 | 16 | $-\infty$ |

Nous avons renuméroté les sommets car la ville a (d'indice 5 page III-9) a la plus faible centration et prend l'indice 0 :

$$2\,C_0 = 52$$

Deux des écartements sont négatifs car les distances ne sont pas euclidiennes. On doit sélectionner 5 - 2 = 3 arcs :

| i | $P_i$ | $S_i$ |
|---|---|---|
| 0 | - | - |
| 1 | 0 | 0 3 |
| 2 | 0 4 | 0 |
| 3 | 0 1 | 0 4 |
| 4 | 0 3 | 0 2 |

Liste des arcs sélectionnés :

| arc | écart. |
|---|---|
| 4-2 | 16 |
| 1-3 | 12 |
| 3-4 | 0 |

On retrouve la solution "hiérarchique" (III-17)

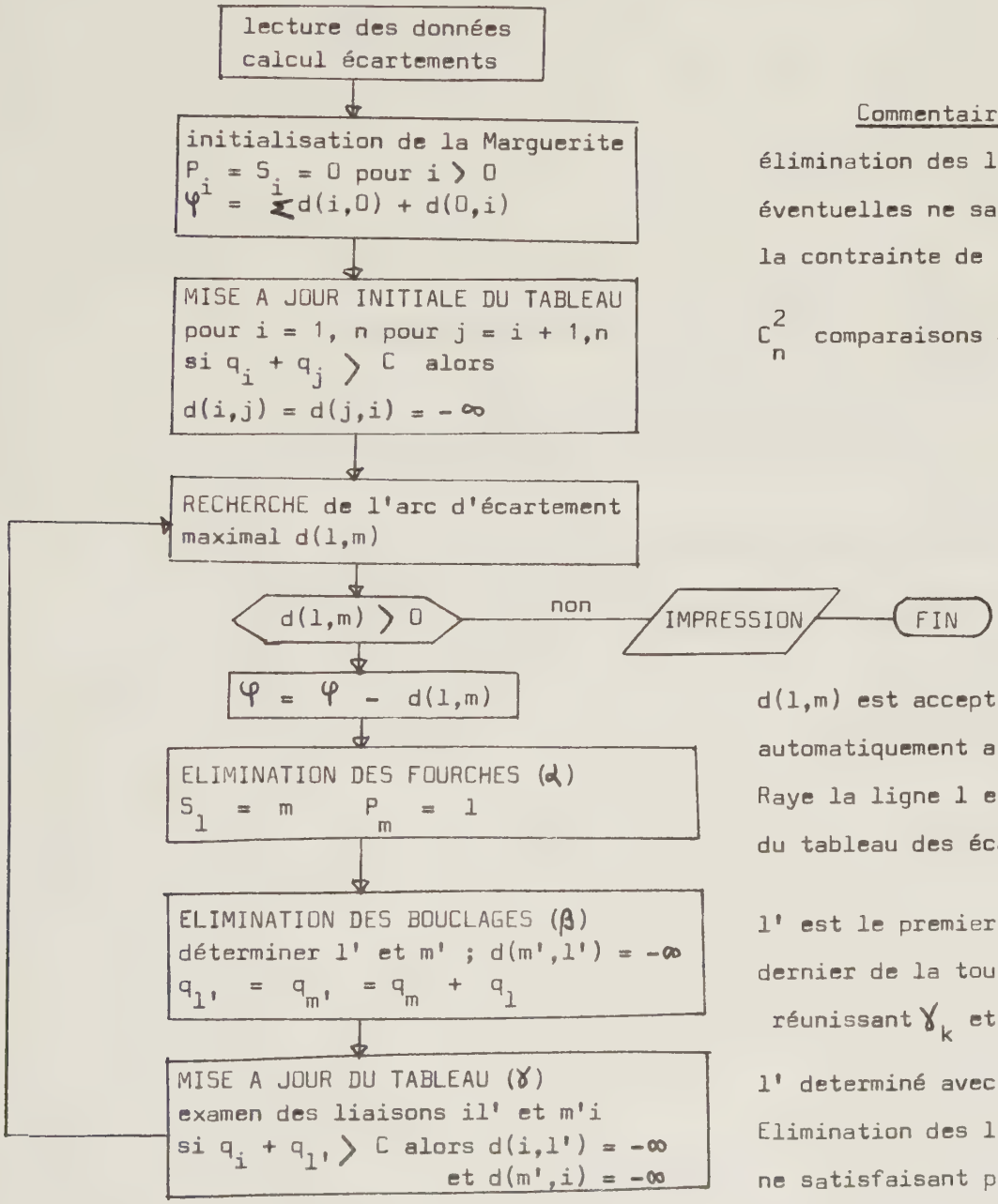
$$\varphi_0^* = 28 \quad \text{et} \quad \varphi = 2\,C_0 - \varphi_0^* = 24$$

Le circuit optimal est 0-2-4-1-3-0 avec $\varphi = 23$ ; l'écart de notre solution avec l'optimum est de 4%; remarquons que le graphe n'est pas euclidien et ne représente donc pas un problème réel (voir II-3).

## VII MATRICE DES LIAISONS POSSIBLES

La méthode exposée jusqu'ici consiste à sélectionner $e_0(l,m)$ dans le tableau puis à vérifier si l'arc (l,m) satisfait aux contraintes nous avons "intégré" la contrainte ($\alpha$) dans la recherche.

On peut aller plus loin: faire en sorte que $[E]$ représente le tableau des liaisons possible en mettant à $-\infty$ tous les $d_{ij}$ qui représentent des arcs violants les contraintes $\beta$ et $\gamma$ :




Commentaires

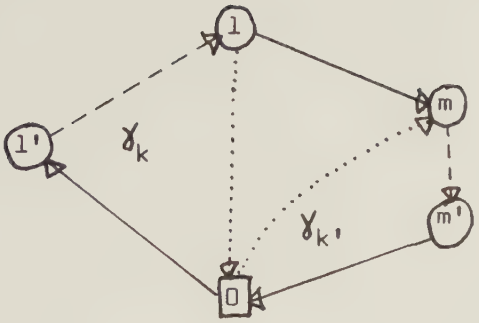
élimination des liaisons éventuelles ne satisfaisant pas la contrainte de capacité.

$C_n^2$ comparaisons = n(n-1)/2

d(l,m) est accepté: il satisfait automatiquement aux contraintes. Raye la ligne l et la colonne m du tableau des écartements.

l' est le premier point et m' le dernier de la tournée formée en réunissant $\gamma_k$ et $\gamma_{k'}$ .

l' determiné avec P,m' avec S Elimination des liaisons futures ne satisfaisant pas la contrainte de capacité. Remarquer $q_{l'} = q_{m'}$ : n - 1 opérations au maximum.




Pour éliminer le bouclage il faut interdire m', l' cet arc satisfait ($\alpha$)

$S_{m'} = 0$ $\quad P_{l'} = 0$

Comparaison des deux méthodes:

Cette méthode peut accélérer le déroulement de l'algorithme et sur un plan théorique donne lieu à une recherche de l'optimum mathématique par une méthode Branch and Bound. (page III-7).

La première méthode vérifie les contraintes à posteriori - cette méthode souple nous permettra l'introduction de nombreuses autres contraintes dans le problème.

CHAPITRE V

# INTRODUCTION ET TRAITEMENT DE CONTRAINTES MULTIPLES

Nous considérerons dans ce chapitre le premier algorithme du chapitre précédent: sélection d'un arc qui satisfait aux contraintes ($\alpha$) et ($\beta$) et vérification a posteriori des autres contraintes.

## I GENERALISATION DE LA CONTRAINTE DE CAPACITE C

La demande du client i au lieu d'être caractérisée par $q_i$ (quantité à livrer), peut être, pour des livraisons hétérogénes, décrite par les deux nombres:

$$q_i \quad \text{(tonnage)} \quad \text{et} \quad v_i \quad \text{(volume)}$$

Les camions de livraison ont un tonnage C et un volume V limités:

$$(\gamma)' \qquad \sum_{i \in \gamma_k} q_i \leqslant C \quad \text{et} \quad \sum_{i \in \gamma_k} v_i \leqslant V$$

On tient compte ainsi des livraisons de plusieurs produits dont certains sont plus volumineux que lourds.

## II CONTRAINTE DE TEMPS

### 1 Introduction

La journée de travail des chauffeurs est limitée à T.

On doit tenir compte des temps de route $t_{ij}$ entre le client i et le client j.

Ce temps peut être une donnée (on introduit alors la matrice $\left[t_{ij}\right]$), où simplement proportionnel à $d_{ij}$, distance de i à j, si on peut définir une vitesse moyenne $\mathcal{V}$:

$$t_{ij} = d_{ij}/\mathcal{V}$$

$t_{ii}$ est le temps passé au dépot i; il peut représenter un temps de pause fixe plus un temps de déchargement proportionnel, par exemple à $q_i$ où à $v_i$.

Ainsi:

$$t_{ii} = t_o + \lambda . q_i$$

$\lambda$ apparaît comme une vitesse de déchargement.

2 Traitement de cette contrainte

On introduit le vecteur $t_i$ initialisé pour "la Marguerite" par :

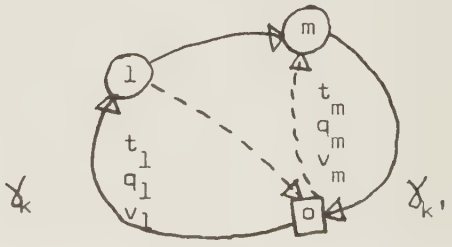
$$t_i = t_{oi} + t_{ii} + t_{io}$$

On doit vérifier que $t_i < T$ lors de l'initialisation. Sinon le point i est éliminé du graphe (on ne peut le livrer) en faisant:

$$P_i = S_i = i$$

Une tournée $\gamma_k$ est affectée du tonnage et volume total livré et du temps total: chaque $t_i$ pour $i \in \gamma_k$ représente le temps total, durée de la tournée $\gamma_k$. On pourra introduire l'arc l m dans la solution s'il satisfait à $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)'$ et:

$$(\gamma)'' \quad \boxed{t_l + t_m - (t_{lo} + t_{om} - t_{lm}) \leqslant T}$$




Ce traitement est parallèle à celui de la contrainte de capacité.

Remarques

1) $t_{lo} + t_{lm} - t_{lm}$ est un écartement en temps ($= e(l,m)/\mathcal{V}$)

2) Nous optimisons à partir de la matrice des coûts, en tenant compte d'une contrainte de temps; si seul le temps importait on se servirait d'une matrice de temps au lieu d'une matrice de coûts.

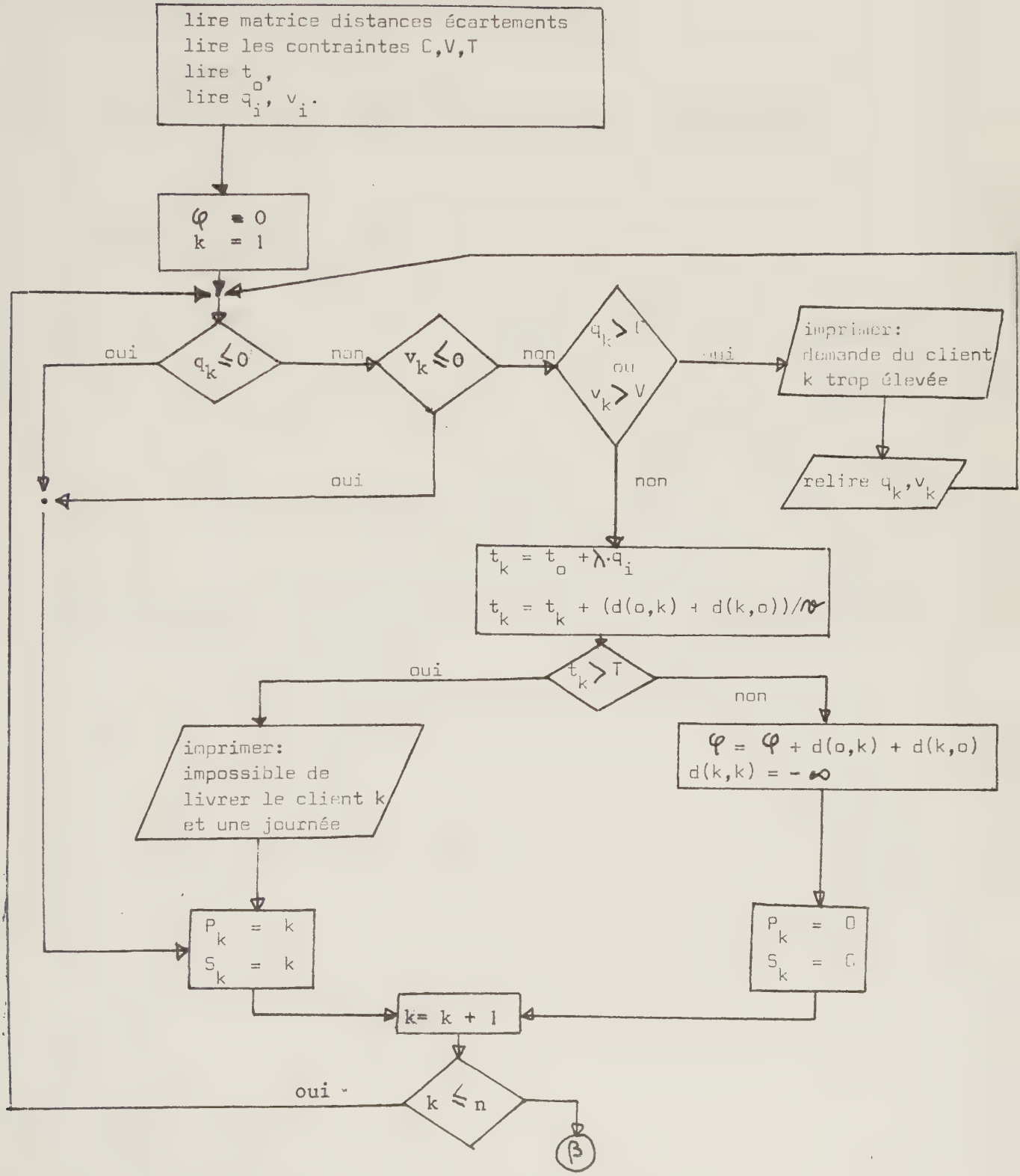
## III CONTRAINTE DE DISTANCE

Supposons que la longueur de chaque circuit pré-hamiltonien soit limitée à D. Cette contrainte se traite comme ci-dessus en remplaçant les temps par les distances correspondantes. Ceci revient à faire :

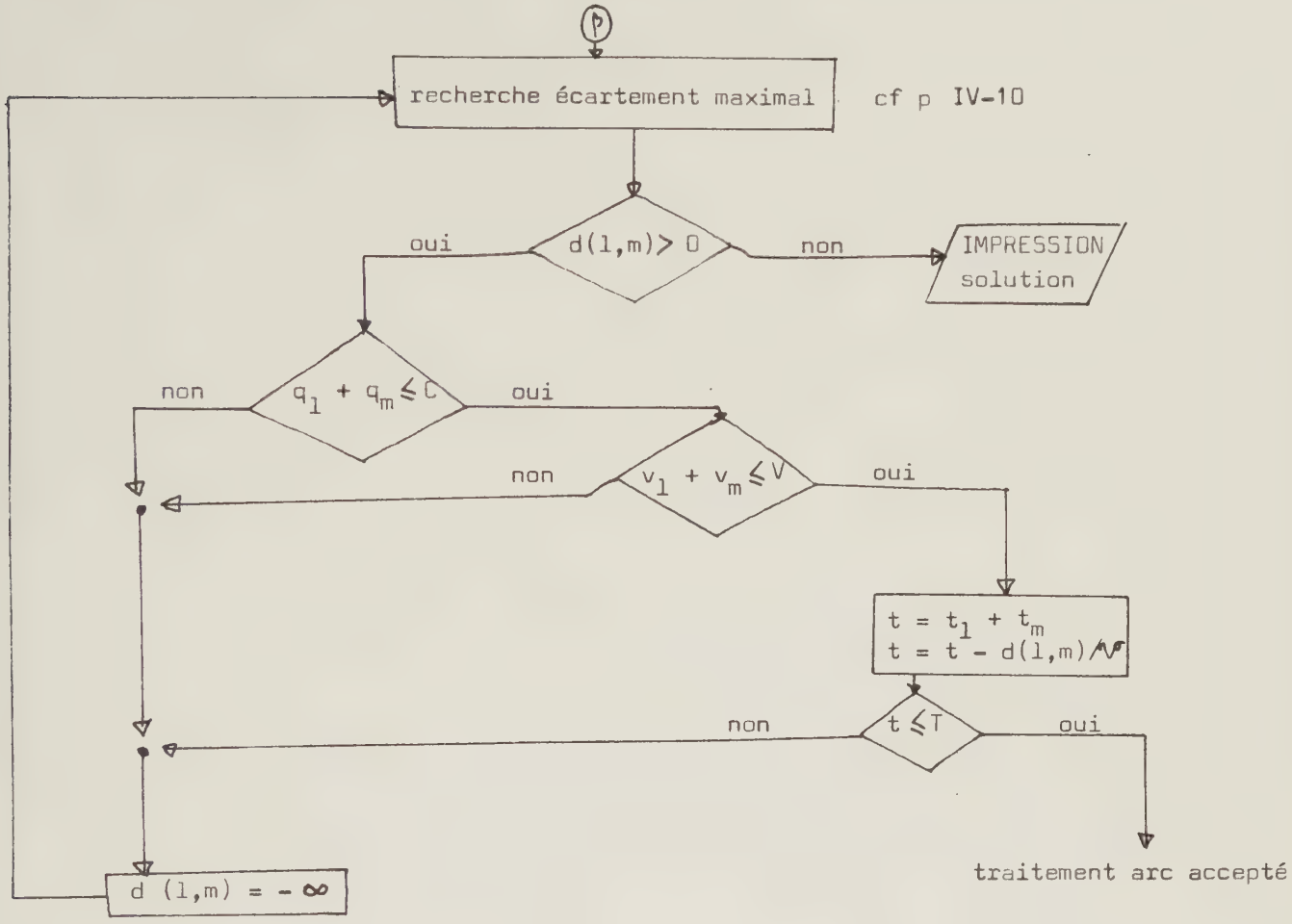
$$\mathcal{V} = 1 \qquad \text{et} \qquad d_{ii} = 0$$

On appelle parfois D "contrainte d'autonomie" [23] .

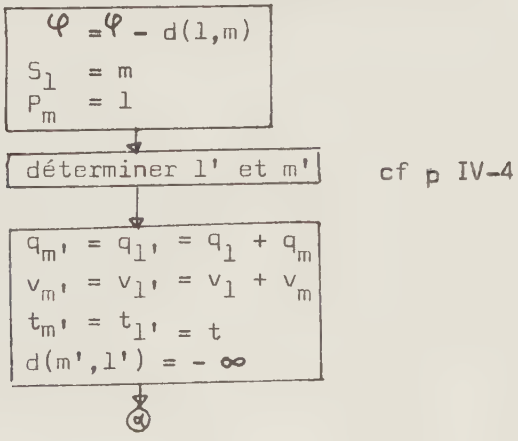
## IV ORGANIGRAMMES



Recherche de l'écartement maximal et vérification des contraintes.




traitement arc accepté:



CHAPITRE VI

# LE PROGRAMME TØURS

## RESULTATS

La méthode décrite au chapitre précédent a été programmée en FORTRAN sur GE 235 utilisé en temps partagé ("time sharing"). Ce programme de démonstration, appelé "IØUR" a les caractéristiques suivantes :

a) L'encombrement mémoire est, pour un graphe de n clients, de $(n+1)^2$ mots pour la matrice distance écartement. Les vecteurs $q_i, v_i, t_i$, P et S ont pour dimension n soit en tout 5n : l'encombrement est de l'ordre de $n^2$. Pour des problèmes comportant 100 points, on peut utiliser le programme en se servant uniquement de la mémoire centrale.

b) Temps d'exécution : pour des problèmes de 40 points, avec données sur disque ce temps est d'une minute (temps de compilation et temps d'exécution) et de 3 mm avec données sur cartes.

c) Edition des résultats : les tournées sont présentées avec le détail des points de livraison, la commande, éventuellement l'horaire de passage et pour chaque tournée le total des commandes fournies, le temps total, le coût, ... Cette partie automatise entièrement le travail de l'organisation du trafic et peut être directement détaillée en feuilles de routes et bons de livraison.
Un récapitulatif avec la distance parcourue, le tonnage total, le temps total, le coût total. Cette partie peut servir directement au bureau de statistique pour la gestion de la distribution.

d) Possibilités de simulation : l'algorithme permet des simulations sur la nature des véhicules à utiliser pour optimiser le coût de distribution, détermination du ou des meilleurs tonnages. Changer de véhicule revient à changer les coûts de parcours et entretien, la contrainte de capacité (tonnage maximal), les vitesses et temps de parcours.

Ce programme réalisé pour la Compagnie B.G.E., a été présenté au S.I.C.O.B. en démonstration puis à la télévision.

Le lecteur trouvera en page VI-2 un exemple d'édition; en page VI-3 la carte des tournées déterminées par le programme; en page VI-4 le circuit

```
TOURS     13129   PARIS


LES CARACTERISTIQUES PROPOSEES SONT :

1  CAPACITE DES CAMIONS            15000 KGS
2  VOLUME DES CAMIONS                 40 M3
3  VITESSE MOYENNE DES CAMIONS        55 KM/H
4  DUREE DE LA JOURNEE DE TRAVAIL    540 MINUTES
5  PAUSE A UN POINT DE LIVRAISON      10 MINUTES
6  TONNAGE DECHARGE PAR MINUTE       100 KGS
7  COUT DU KM PARCOURU              1.23 FRANCS
8  TONNAGES ET VOLUMES A LIVRER : VOIR LA CARTE

VOULEZ VOUS FAIRE DES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 1

CAPACITE DES CAMIONS EN KGS ? 30000

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 2

VOLUME DES CAMIONS EN M3? 75

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 3

VITESSE DES CAMIONS EN KM/H? 56

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 5

PAUSE A UN POINT DE LIVRAISON EN MINUTES ? 5

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 6

VITESSE DE DECHARGEMENT EN KGS/MN ? 120

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 7

COUT DU KM PARCOURU EN FRANCS ? 1.62

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? OUI

TAPEZ LE NUMERO DU PARAGRAPHE A MODIFIER? 8

TAPEZ LE NO. DU POINT (0 QUAND VOUS AVEZ FINI)
ON VOUS DEMANDERA ENSUITE LE TONNAGE PUIS LE VOLUME

POINT ? 23
Q(23) =? 32000
V(23) =? 60

POINT ? 25
Q(25) =? 0
V(25) =? 0

POINT ? 32
Q(32) =? 12500
V(32) =? 23.8

POINT ? 0

AUTRES MODIFICATIONS (OUI OU NON)? NON

LA DEMANDE DU POINT 23 EST TROP ELEVEE,CHANGEZ LA
Q(23) =? 29800
V(23) =? 56

ON NE PEUT PAS LIVRER LE POINT 23 EN UNE JOURNEE

LIAISONS EFFECTUEES :
     24, 10
     11, 24
     34, 11
     18, 34
     31, 17
     10,  8
     26, 31
     29,  9
      9, 22
     33,  4
      2, 33
     17, 13
     15, 26
      4, 27
     14, 29
     22,  5
      3, 15
     32, 20
      7, 32
      5,  6
     30,  2
     13, 28
     27, 19
      6, 21
     12, 35
     16, 12
     20, 16
```

TOURNEE 1

| POINT | TONNAGE | VOLUME | ARRIVEE | DEPART |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5100 | 8.500 | 65 | 115 |
| 15 | 1700 | 5.100 | 142 | 169 |
| 26 | 2400 | 6.400 | 194 | 224 |
| 31 | 2500 | 6.700 | 253 | 283 |
| 17 | 4000 | 10.000 | 335 | 375 |
| 13 | 2500 | 7.400 | 427 | 477 |
| 8 | 1400 | 3.400 | 474 | 532 |
| TOTAUX | 29000 | 47.600 | 532 | |

322 KM EN 9 H.52 DONT 3 H.18 D'ARRET

TOURNEE 2

| POINT | TONNAGE | VOLUME | ARRIVEE | DEPART |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 1900 | 5.000 | 43 | 63 |
| 32 | 12500 | 23.400 | 166 | 215 |
| 20 | 900 | 2.400 | 262 | 274 |
| 16 | 2000 | 4.000 | 341 | 362 |
| 12 | 2500 | 4.000 | 395 | 420 |
| TOTAUX | 19800 | 39.200 | 466 | |

269 KM EN 7 H.46 DONT 3 H. 7 D'ARRET

TOURNEE 3

| POINT | TONNAGE | VOLUME | ARRIVEE | DEPART |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 1200 | 3.200 | 79 | 94 |
| 27 | 1300 | 3.800 | 144 | 159 |
| 9 | 5000 | 12.000 | 205 | 251 |
| 22 | 1700 | 4.600 | 302 | 321 |
| 5 | 2400 | 5.600 | 360 | 385 |
| 6 | 3200 | 8.600 | 419 | 450 |
| 21 | 1200 | 3.200 | 486 | 501 |
| TOTAUX | 16000 | 41.000 | 537 | |

358 KM EN 8 H.57 DONT 2 H.46 D'ARRET

TOURNEE 4

| POINT | TONNAGE | VOLUME | ARRIVEE | DEPART |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 3000 | 5.600 | 101 | 131 |
| 34 | 4000 | 8.000 | 170 | 208 |
| 11 | 4000 | 10.600 | 239 | 277 |
| 24 | 2000 | 5.400 | 306 | 329 |
| 10 | 3000 | 8.000 | 364 | 394 |
| 8 | 1800 | 4.800 | 424 | 444 |
| TOTAUX | 17800 | 42.400 | 537 | |

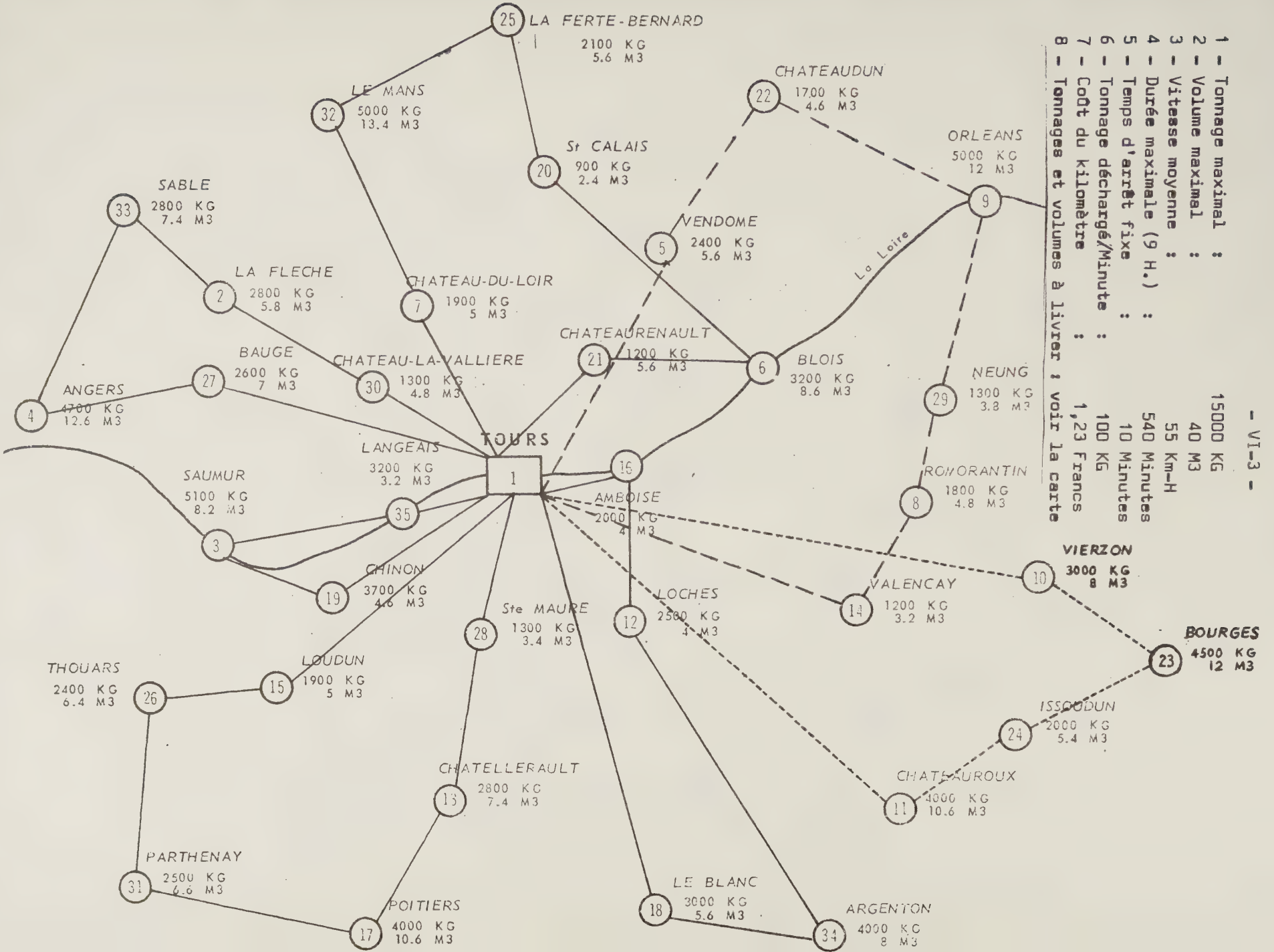
348 KM EN 8 H.57 DONT 2 H.57 D'ARRET

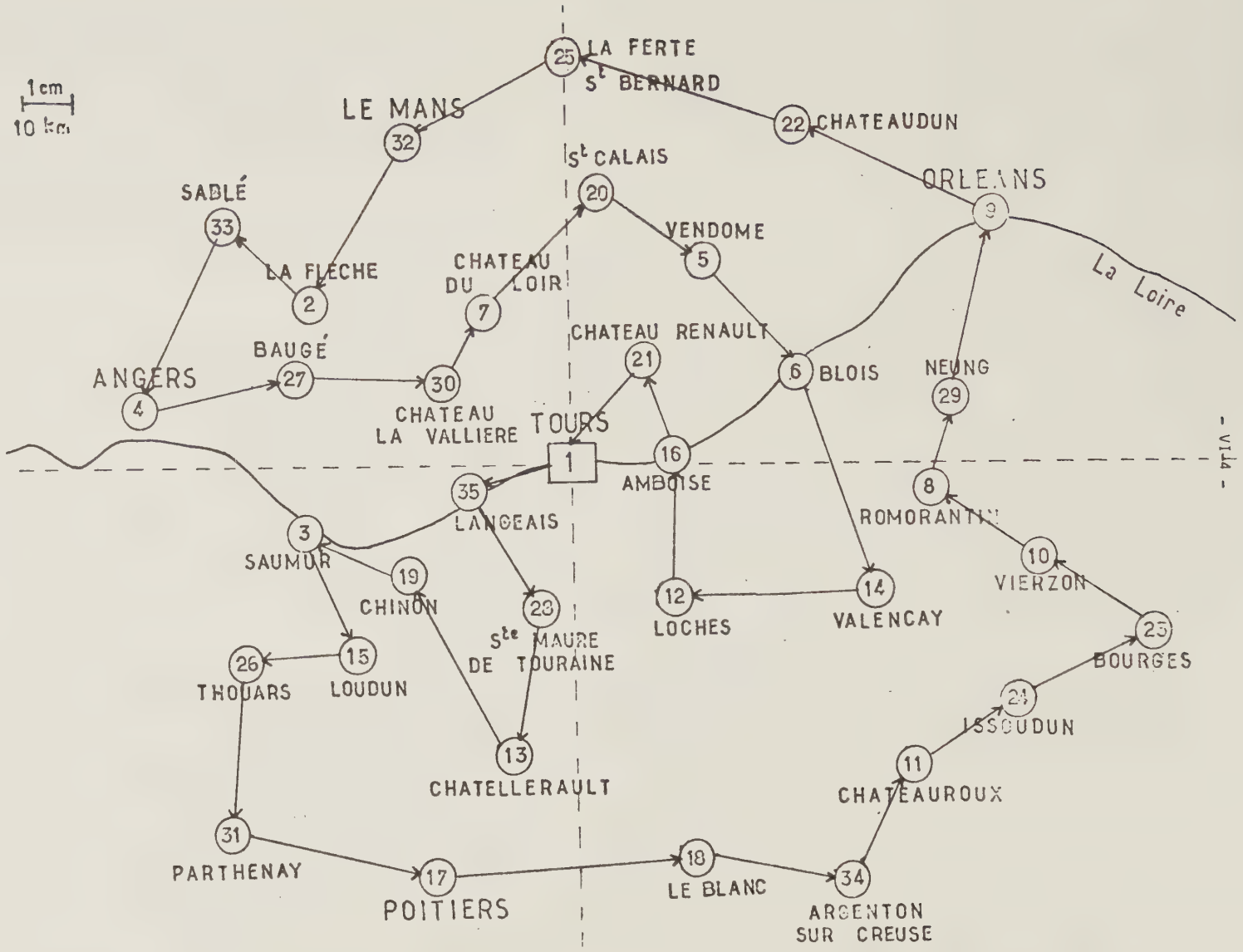
TOURNEE 5

| POINT | TONNAGE | VOLUME | ARRIVEE | DEPART |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 1800 | 4.800 | 36 | 56 |
| 2 | 2200 | 5.800 | 93 | 116 |
| 33 | 2800 | 7.400 | 143 | 171 |
| 4 | 4700 | 12.600 | 220 | 264 |
| 27 | 2600 | 7.000 | 302 | 328 |
| 19 | 3700 | 4.600 | 382 | 417 |
| 35 | 3200 | 3.200 | 441 | 472 |
| TOTAUX | 21000 | 45.400 | 505 | |

288 KM EN 8 H.35 DONT 3 H.27 D'ARRET

```
RECAPITULATION :

DISTANCE TOTALE  1571 KMS

TONNAGE TOTAL   94600 KGS

VOLUME TOTAL   215.600 M3

TEMPS TOTAL  42 HEURES 57


COUT TOTAL      2545.02 FRANCS

FEREZ VOUS UNE AUTRE SIMULATION (OUI OU NON) ? NON


AT LINE NO. 9001 STOP  END


RAN    116.00 SEC.
READY.

BYE

*** OFF AT 13:45
```


1 - Tonnage maximal : 15000 KG
2 - Volume maximal : 40 M3
3 - Vitesse moyenne : 55 Km-H
4 - Durée maximale (9 H.) : 540 Minutes
5 - Temps d'arrêt fixe : 10 Minutes
6 - Tonnage déchargé/Minute : 100 KG
7 - Coût du kilomètre : 1,23 Francs
8 - Tonnages et volumes à livrer : voir la carte
TOURS 1
LA FERTE-BERNARD 25 2100 KG 5.6 M3
LE MANS 32 5000 KG 13.4 M3
St CALAIS 20 900 KG 2.4 M3
CHATEAUDUN 22 1700 KG 4.6 M3
ORLEANS 9 5000 KG 12 M3
SABLE 33 2800 KG 7.4 M3
VENDOME 5 2400 KG 5.6 M3
LA FLECHE 2 2800 KG 5.8 M3
CHATEAU-DU-LOIR 7 1900 KG 5 M3
La Loire
CHATEAURENAULT 21 1200 KG 5.6 M3
BAUGE 27 2600 KG 7 M3
CHATEAU-LA-VALLIERE 30 1300 KG 4.8 M3
BLOIS 6 3200 KG 8.6 M3
NEUNG 29 1300 KG 3.8 M3
ANGERS 4 4700 KG 12.6 M3
LANGEAIS 3200 KG 3.2 M3
ROMORANTIN 8 1800 KG 4.8 M3
SAUMUR 35 5100 KG 8.2 M3
AMBOISE 16 2000 KG 4 M3
VIERZON 10 3000 KG 8 M3
3
CHINON 19 3700 KG 4.6 M3
VALENCAY 14 1200 KG 3.2 M3
LOCHES 12 2500 KG 4 M3
Ste MAURE 28 1300 KG 3.4 M3
BOURGES 23 4500 KG 12 M3
THOUARS 26 2400 KG 6.4 M3
LOUDUN 15 1900 KG 5 M3
ISSOUDUN 24 2000 KG 5.4 M3
CHATELLERAULT 13 2800 KG 7.4 M3
CHATEAUROUX 11 4000 KG 10.6 M3
PARTHENAY 31 2500 KG 6.6 M3
LE BLANC 18 3000 KG 5.6 M3
POITIERS 17 4000 KG 10.6 M3
ARGENTON 34 4000 KG 8 M3


1 cm
10 km
25 LA FERTE
St BERNARD
LE MANS
32
22 CHATEAUDUN
St CALAIS
20
ORLEANS
9
SABLÉ
33
VENDOME
5
LA FLECHE
2
CHATEAU
DU LOIR
7
La Loire
CHATEAU RENAULT
21
BAUGÉ
27
ANGERS
4
30
6 BLOIS
NEUNG
29
CHATEAU
LA VALLIERE
TOURS
1
16
AMBOISE
8
ROMORANTIN
35
LANGEAIS
3
SAUMUR
19
CHINON
23
Ste MAURE
DE TOURAINE
12
LOCHES
14
VALENCAY
10
VIERZON
25
BOURGES
26
THOUARS
15
LOUDUN
24
ISSOUDUN
13
CHATELLERAULT
11
CHATEAUROUX
31
PARTHENAY
17
POITIERS
18
LE BLANC
34
ARGENTON
SUR CREUSE
- V14 -

Le Programme de CALECA :

La matrice des distances écartements comporte pour l'exemple TOURS 35 x 35 = 1225 éléments demandant chacun un calcul de la distance de i à j : la valeur de l'arc ij, puis l'écartement de cet arc (une addition et une soustraction). De plus, la frappe de cette matrice nécessité 4 caractères par élément (la valeur exprimée avec 3 chiffres et un séparateur, l'espace par exemple). On arrive à : 1225 calculs de distance.

2450 additions ou soustractions pour le calcul des écartements

5000 caractères à perforer pour la matrice.

Ce travail a été laissé à l'ordinateur : le programme CALECA calcule à partir des coordonnées de points (pour le dépôt central de TOURS X(1) = Y(1) = 0) les distances, puis les écartements, et les écrit sur fichier ou sur cartes. Les distances sont calculées par le théorème de Pythagore :

$$d_{ij} = 1{,}1 \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

1,1 est un coefficient correcteur donnant le rapport moyen entre la distance réelle et la distance à vol d'oiseau séparant deux villes de la région.

| i | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | -56 | 35 |
| 3 | -59 | -13 |
| 4 | -93 | 12 |
| 5 | 30 | 44 |
| 6 | 49 | 20 |
| 7 | -19 | 34 |
| 8 | 79 | -7 |
| 9 | 92 | 54 |
| 10 | 102 | -21 |
| 11 | 73 | -66 |
| 12 | 22 | -30 |

| i | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 13 | -14 | -63 |
| 14 | 65 | -28 |
| 15 | -48 | -41 |
| 16 | 22 | 0 |
| 17 | -31 | -90 |
| 18 | 25 | -86 |
| 19 | -35 | -24 |
| 20 | 6 | 57 |
| 21 | 17 | 21 |
| 22 | 50 | 73 |
| 23 | 126 | -37 |
| 24 | 97 | -52 |

| i | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 25 | 1 | 88 |
| 26 | -70 | -44 |
| 27 | -59 | 18 |
| 28 | -6 | -31 |
| 29 | 84 | 13 |
| 30 | -27 | 18 |
| 31 | -75 | -81 |
| 32 | -35 | 69 |
| 33 | -74 | 52 |
| 34 | 60 | -91 |
| 35 | -21 | -7 |

Liste des coordonnées des villes de l'exemple TOURS.

```
/ EXEC
```

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 72 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 66 | 52 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | 103 | 47 | 46 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | 58 | 95 | 116 | 139 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 58 | 116 | 124 | 156 | 33 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | 42 | 40 | 67 | 84 | 55 | 76 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | 87 | 155 | 151 | 190 | 77 | 44 | 116 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | 117 | 164 | 181 | 203 | 69 | 60 | 124 | 68 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | 114 | 184 | 177 | 217 | 106 | 73 | 146 | 29 | 83 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | 108 | 180 | 156 | 201 | 129 | 98 | 149 | 65 | 133 | 58 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | 40 | 111 | 91 | 134 | 81 | 62 | 83 | 67 | 120 | 88 | 68 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | 70 | 117 | 73 | 119 | 127 | 114 | 106 | 119 | 173 | 135 | 95 | 53 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 14 | 77 | 150 | 137 | 179 | 88 | 55 | 114 | 27 | 94 | 41 | 42 | 47 | 95 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 15 | 69 | 84 | 33 | 76 | 126 | 126 | 88 | 144 | 186 | 166 | 135 | 77 | 44 | 125 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 16 | 24 | 94 | 90 | 127 | 49 | 36 | 58 | 63 | 97 | 90 | 91 | 32 | 79 | 56 | 89 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 17 | 104 | 140 | 90 | 131 | 161 | 149 | 137 | 151 | 208 | 164 | 117 | 88 | 35 | 125 | 57 | 114 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 18 | 98 | 160 | 122 | 168 | 143 | 119 | 140 | 105 | 170 | 110 | 57 | 61 | 49 | 77 | 54 | 94 | 61 | | | | | | | | | | | | | | |
| 19 | 46 | 68 | 29 | 75 | 103 | 104 | 66 | 126 | 163 | 150 | 127 | 63 | 48 | 110 | 23 | 68 | 72 | 94 | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 63 | 72 | 105 | 119 | 30 | 62 | 37 | 106 | 94 | 136 | 154 | 97 | 133 | 113 | 123 | 65 | 166 | 158 | 99 | | | | | | | | | | | | |
| 21 | 29 | 81 | 91 | 121 | 29 | 35 | 42 | 74 | 90 | 104 | 113 | 56 | 98 | 75 | 98 | 23 | 133 | 118 | 75 | 41 | | | | | | | | | | | |
| 22 | 97 | 123 | 152 | 171 | 38 | 58 | 87 | 93 | 90 | 118 | 154 | 117 | 165 | 112 | 165 | 86 | 200 | 177 | 141 | 51 | 67 | | | | | | | | | | |
| 23 | 144 | 215 | 205 | 246 | 138 | 105 | 177 | 61 | 106 | 31 | 66 | 114 | 156 | 67 | 191 | 121 | 182 | 123 | 177 | 167 | 135 | 147 | | | | | | | | | |
| 24 | 121 | 193 | 176 | 220 | 128 | 95 | 158 | 53 | 116 | 34 | 30 | 85 | 122 | 43 | 159 | 100 | 146 | 87 | 148 | 156 | 119 | 146 | 35 | | | | | | | | |
| 25 | 96 | 85 | 129 | 132 | 57 | 91 | 63 | 135 | 106 | 163 | 186 | 131 | 166 | 145 | 151 | 99 | 158 | 193 | 129 | 34 | 75 | 56 | 194 | 186 | | | | | | | |
| 26 | 90 | 88 | 36 | 66 | 146 | 148 | 102 | 168 | 208 | 189 | 159 | 102 | 65 | 149 | 24 | 112 | 66 | 114 | 44 | 139 | 119 | 184 | 215 | 183 | 164 | | | | | | |
| 27 | 67 | 18 | 34 | 37 | 101 | 119 | 47 | 154 | 170 | 182 | 172 | 103 | 101 | 145 | 66 | 91 | 122 | 147 | 53 | 83 | 83 | 134 | 212 | 188 | 101 | 69 | | | | | |
| 28 | 34 | 91 | 61 | 106 | 91 | 82 | 72 | 97 | 142 | 119 | 95 | 30 | 36 | 78 | 47 | 45 | 70 | 69 | 32 | 97 | 62 | 129 | 145 | 115 | 131 | 71 | 79 | | | | |
| 29 | 93 | 155 | 159 | 194 | 68 | 39 | 115 | 22 | 45 | 42 | 87 | 82 | 136 | 49 | 156 | 69 | 169 | 126 | 137 | 98 | 74 | 75 | 71 | 72 | 123 | 180 | 157 | 110 | | | |
| 30 | 35 | 36 | 49 | 72 | 68 | 83 | 191 | 191 | 136 | 148 | 143 | 75 | 90 | 113 | 68 | 57 | 118 | 127 | 47 | 56 | 48 | 104 | 178 | 156 | 82 | 82 | 35 | 58 | 122 | | |
| 31 | 121 | 129 | 76 | 104 | 179 | 175 | 140 | 187 | 236 | 205 | 163 | 120 | 69 | 164 | 53 | 139 | 49 | 110 | 76 | 176 | 151 | 218 | 226 | 191 | 203 | 41 | 110 | 93 | 203 | 121 | |
| 32 | 85 | 43 | 93 | 89 | 76 | 106 | 42 | 150 | 140 | 180 | 190 | 125 | 147 | 153 | 121 | 98 | 174 | 182 | 102 | 46 | 77 | 93 | 212 | 196 | 44 | 130 | 62 | 114 | 144 | 56 | 170 |
| 33 | 99 | 27 | 73 | 48 | 114 | 139 | 63 | 180 | 182 | 209 | 207 | 138 | 142 | 176 | 106 | 120 | 163 | 186 | 93 | 88 | 105 | 138 | 240 | 220 | 91 | 105 | 40 | 118 | 179 | 63 | 146 | 46 |
| 34 | 119 | 188 | 156 | 202 | 152 | 122 | 162 | 94 | 163 | 89 | 30 | 79 | 87 | 69 | 130 | 108 | 100 | 38 | 127 | 173 | 131 | 180 | 93 | 59 | 207 | 152 | 177 | 98 | 117 | 153 | 148 | 204 | 215 |
| 35 | 24 | 60 | 42 | 81 | 79 | 82 | 45 | 109 | 141 | 136 | 122 | 53 | 62 | 97 | 47 | 47 | 91 | 100 | 24 | 76 | 51 | 117 | 165 | 138 | 107 | 67 | 50 | 31 | 117 | 28 | 100 | 85 | 87 | 128 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |

MATRICE DES DISTANCES POUR TOURS

d(34,35) = 128

# C O N C L U S I O N

La notion topologique d'écartement et sa généralisation nous ont permis d'aboutir à deux types de méthodes pour résoudre les problèmes de tournées.

Sur le problème simple, c'est-à-dire avec la seule contrainte de capacité, nous avons proposé deux algorithmes permettant de trouver l'optimum lorsque la taille est de l'ordre de quelques dizaines de villes. Ils généralisent les algorithmes connus de Little et Bertier traitant le problème du commis-voyageur. On peut encore, dans une recherche ultérieure, tenter d'améliorer leurs performances.

Nous avons aussi développé un modèle complexe incluant de multiples contraintes, notamment de temps, que l'on traite de façon satisfaisante par une méthode heuristique quand le graphe est euclidien, et qui a été appliqué dans des problèmes réels de distribution (où cette condition est remplie). On peut penser profiter de la souplesse de cet algorithme pour introduire de nouvelles contraintes: camions de capacités différentes, heures de passage fixées en certaines villes etc... En outre, le programme "TØURS" permet des simulations sur la nature des véhicules à utiliser.

Cette étude illustre l'intérêt des méthodes heuristiques en recherche opérationnelle, en particulier lorsque la structure et la taille du problème rendent délicate, sinon impossible, la recherche de l'optimum théorique.

# B I B L I O G R A P H I E


1. ARSAC J. — Systèmes de Conduite des Ordinateurs DUNOD Université 1968

1b. ARSAC J. — La Science Informatique DUNOD 1970

1c. BARACHET L. — Graphic solution of the travelling salesman problem J.O.R.S.A. 5, 1957, 6, 841-845

2. BERGE C. — Graphe et hypergraphes DUNOD Paris 1971

3. BERGE - GHOUILA HOURI — Programmes Jeux et Réseaux de Transports DUNOD Paris 1962.

4. BERTIER P. - ROY B. - SUSSMANN B. — "La notion d'écartement: premières applications aux problèmes de distribution". Symposium de Programmation Mathématique Londres 1964.

5. BERTIER P. — "Quelques Algorithmes pour les problèmes de tournées". METRA Vol. IV N° 4 607-20 (1965)

6. BERTIER P. — "Un algoritmo per i problemi di distribuzione con vincoli di capacita" METRA Vol. V N° 3 445-52 (Septembre 1966).

7. BERTIER P. — "Procédures pour élaborer des tournées de distribution" METRA Série Spéciale N° 8 - 1966.

8. BERTIER P. - NGHIEN Ph. T. - ROY B. — "Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P. METRA IV N° 3 Septembre 1965.

9. CHRISTOFIDES N. and EILON — An algorithm for the vehicle dispatching problem O.R.Q. Vol. 70 N° 3 p. 309-318.

10. CLARK G. et WRIGHT J.W. — Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points J.O.R.S.A. 12, (1964), 4, p. 568-581.

11. DANTZIG G.B. et RAMSER J.U. — MANAGEMENT SCIENCE Vol. 6 N° 1 1959. The truck dispatching problem.

12. FAURE R. — "Recherche Opérationnelle", "Compléments de Mathématiques" Cours Polycopiés de l'Ecole Supérieure d'Electricité.

12b. FAURE R. — Graphes et applications. Cours Polycopié de la Faculté des Sciences.

13. FLETCHER A. et CLARK G. "Les méthodes mathématiques dans l'entreprise". Entreprise Moderne d'Edition Paris 1966 p.67-72.

14. GASKELL T.J. Bases for vehicle fleet scheduling. Operational Research quarterly Vol. 18. N° 3 p. 281-295.

15. KAUFMANN A. "Initiation à la Combinatorique" DUNOD p. 397-419.

15b. LAURIERE J.L. Sur la coloration de certains hypergraphes. Thèse de 3e Cycle. Paris VI 1971.

16. LAWLER L. et WOOD D.E. Branch and Bound Methods: a Survey. Operations Research Juillet Août 1966.

17. LEMAIRE B. Determinacion de itinerarios mediante la teoria de grafos. Universidad de la Habana Facultad de Ciencias Matematica. 1970.

18. LITTLE J.D.C. and others "An algorithm for the Travelling Salesman Problem". Operations Research 11/6 X 1963.

19. MARCONI R. Système permettant l'automatisation intégrale de la distribution de carburant à un coût minimum. Revue Gestion DUNOD numéro spécial mai 1964.

20. MARCONI R. La Ricerca operativa applicata al problema di rifornimenti. Quaderni R.O. N° 1 novembre 1962.

21. MARILLEY J.P. Contribution à l'étude pratique d'une classe de programmes linéaires en nombres entiers: les problèmes recouvrement. Thèse Ingénieur CNAM.

22. NOLIN L. Formalisation des notions de machine et de programme. Collection Programmation Gauthier Villars 1969.

22b. PIERCE J.F. On the truck dispatching problem - Part I IBM Scientific Center, Technical Report 320-2018 (Juillet 1968).

23. VALENSI et DE BUNGE Calcul des meilleurs itinéraires de distribution et de collecte R.I.R.O. Vol. I 4ème année Avril 1970 p. 7-17.

24. VO-KHAC K. — La Régularisation dans les problèmes combinatoires et son application aux problèmes des tournées de livraison. R.I.R.O. N° V-1, 1969, p. 91-104.

25. WEBB M.H.J. — Some methods of producing approximate solutions to Travelling Salesman Problems with hundreds or thousands of cities. Operational Research Quarterly. Vol. 22 N° 1 March 1971 p. 49-66

26. YELLOW P.C. — A computational modification to the savings method of vehicle scheduling. Operational Research Quarterly Vol. 21 N° 2 June 1970 p. 281-283.

27. BEAUDELOT C., DAVID A., JOUTARD J.P., MELAMED R., RAOUX B., STANISLAS G. — Procédures arborescentes d'optimisation Rapport de D.E.A. Paris VI 1970.

28. BIONDI E., PALERMO P., PLUCHINOTTA C. — A Heuristic method for a Delivery Problem. Istituto di Elettrotecnica ed Eletronica del Politecnico di Milano. Laboratorio di Controlli Automatici Relazione Interna 70-16 Settembre 1970.

Remarque : Cette bibliographie, a été volontairement limitée aux ouvrages de formation générale et aux articles traitant spécifiquement des problèmes de tournées (ils sont peu nombreux). Pour une bibliographie du problème du commis-voyageur, on se reportera par exemple, à [16], [24], [25].

# V O C A B U L A I R E

La liste ci-dessous n'a pas la prétention d'être un index ou un lexique; elle donne la traduction française des mots anglais et américains les plus fréquemment utilisés dans les articles qui traitent du problème des tournées.

| | |
|---|---|
| (to) ADD | ajouter, additionner |
| AMOUNT | masse, montant |
| (to) ATTEMPT | essayer |
| BALANCE | équilibre |
| BRANCH AND BOUND | Recherche arborescente, PSEP |
| CAPACITY CONSTRAINT | contrainte de capacité |
| CHAIN | chaîne |
| COLLECTION | ramassage |
| COLUMN j | colonne j |
| COMPUTER, (to) COMPUTE | ordinateur, calculer |
| COMPUTATION TIME | temps de calcul |
| COST | coût |
| CUSTOMER | client |
| DATA | données |
| DELIVER, DELIVERY | livrer, livraison |
| DEVICE | procédé |
| DYNAMIC PROGRAMMING | programmation dynamique |
| FEASIBLE (SOLUTION) | solution possible, ne violant pas les contraintes |
| GRID | quadrillage |
| (to) INCREASE, INCREASINGLY | augmenter, de plus en plus |
| INFINITY | l'infini |
| INTEGER, INTEGER PROGRAMMING | nombre entier, programmation en entiers |
| JOB | tâche |
| JOURNEY | voyage |
| KNAPSACK PROBLEM | |

| | |
|---|---|
| LENGTH | longueur |
| LEVEL | niveau |
| L.P., LINEAR PROGRAMMING | P.L. programmation linéaire |
| LINK, LINKAGE | lien, liaison |
| LOOP | boucle |
| LORRY | camion (ang.) |
| LOWER BOUND | borne inférieure, minorant |
| | |
| MILEAGE | équivalent de kilométrage |
| | |
| NETWORK | réseau |
| NODE | sommet (d'un graphe) |
| | |
| PROCEDURE | procédure |
| | |
| RANDOM | au hasard |
| REQUIREMENT | demande, commande |
| RESTRICTION | restriction |
| ROUTE | circuit pré-hamiltonien, tournée |
| ROW i | ligne i |
| RULE | règle |
| | |
| SAVING | écartement |
| (to) SCAN | inspecter, balayer |
| SEARCH | recherche |
| SET, SUBSET | ensemble, sous-ensemble |
| SIZE | taille |
| SPANNING TREE | arbre |
| STAGE | étape |
| STORAGE | mémoire |
| | |
| TRAVELLING (1) SALESMAN PROBLEM | problème de l'agent-voyageur<br>(1) prend un seul L en américain |
| TRIAL | essai |
| TRIP | voyage |
| TRUCK | camion (am.) |
| TRUCK DISPATCHING PROBLEM | problème des tournées (en américain) |
| | |
| VEHICLE FLEET SCHEDULING<br>DISPATCHING PROBLEM | problème des tournées (en anglais) |
| VERTEX (Pl. VERTICES) | sommet |
| | |
| (to) YIELD | fournir |

Académie de Paris

UNIVERSITE de PARIS VI
11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE
Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336.25.25 et 325.12.21

# PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : . . . . . .

THESE DE : . DOCTEUR INGENIEUR . . . . . .

NOM : . LEMAIRE . . . . . .

Prénoms : . . Bernard . . . . . .

né le 20 Juin . . . 19.45 à . PARIS . . . : Seine . . . . . Dépt : . . .

1ère THESE : . . . Problèmes de tournées avec contraintes multiples . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

2e THESE (Propositions faites par l'Université) . . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Vu et Approuvé

PARIS, le 13 Janvier 1972

Le Président

de l'Université de PARIS VI

A. HERPIN

C.3e c. 71-14